



УДК 511.3+517.5

Соотношения для кратных дзета-значений

С. А. Злобин

Мы доказываем новые соотношения для кратных дзета-значений. Из них, в частности, следуют равенство Васильева и формула суммирования кратных дзета-значений фиксированного веса с ограничением на первую координату.

Библиография: 9 названий.

В работе [1] доказывается теорема, связывающая значения кратных дзета-функций двух типов

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_l^{s_l}},$$

$$\tilde{\zeta}(s_1, s_2, \dots, s_l) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_l^{s_l}}.$$

Для удобства полагается $\zeta(\emptyset) = \tilde{\zeta}(\emptyset) = 1$ (здесь под символом \emptyset понимается нулевой вектор).

Обозначим через $\{p\}_l$ l -мерный вектор, все координаты которого равны p .

ТЕОРЕМА 1 (см. [1; теорема 4]). *При натуральных $s_j > 1$ справедливо равенство*

$$\tilde{\zeta}(2, \{1\}_{s_1-2}, 2, \{1\}_{s_2-2}, 2, \{1\}_{s_k-2}, 1)$$

$$= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^j s_i \zeta(s_j, s_{j-1}, \dots, s_i + 1, \dots, s_1) \tilde{\zeta}(s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_k).$$

Из этой теоремы, в частности, следует обобщение равенства Васильева

$$\tilde{\zeta}(\{2\}_k, 1) = 2\zeta(2k + 1)$$

(по сути доказанного в [2]):

ТЕОРЕМА 2 (см. [1; теорема 5]). *При натуральных $k, s \geq 2$ выполняется равенство*

$$\tilde{\zeta}(\{2, \{1\}_{s-2}\}_k, 1) = s\zeta(sk + 1).$$

Оказывается, теорему 1 можно обобщить и на случай, когда существуют значения $s_j = 1$. Результат легче сформулировать в терминах слов в алфавите $\{a, b\}$. По определению

$$\tilde{\zeta}(a^{s_1-1} b a^{s_2-1} b \dots a^{s_l-1} b) = \tilde{\zeta}(s_1, s_2, \dots, s_l).$$

ТЕОРЕМА 3. При натуральных s_j справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \tilde{\zeta}(ab^{s_1-1}ab^{s_2-1}\dots ab^{s_k-1}b) \\ &= \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \dots \lim_{s_k^+ \rightarrow s_k+0} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^j s_i^+ \zeta(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_i^+ + 1, \dots, s_1^+) \\ & \quad \times \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+). \end{aligned}$$

В случае, когда все $s_j > 1$, мы получаем теорему 1. Заметим также, что в левой части может стоять любое слово, начинающееся на a и оканчивающееся на b (что равносильно тому, что вектор \vec{s} – произвольный с натуральными s_j и $s_1 > 1$).

Ключевым в доказательстве теоремы 1 является вычисление интеграла

$$I_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{(1-Q_k)^\sigma}{Q_k} dx_1 \dots dx_{r_k}, \quad \sigma \geq 0,$$

где $r_j = \sum_{i=1}^j s_i$ и

$$Q_0 = 1, \quad Q_k = 1 - x_1 \dots x_{r_1-1} + x_1 \dots x_{r_1} - \dots - x_1 \dots x_{r_k-1} + x_1 \dots x_{r_k}.$$

Чтобы избежать проблем со сходимостью интеграла при $s_1 = 1$, мы будем рассматривать интегралы

$$J_\emptyset = 1, \quad J_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{1 - (1-Q_k)^\sigma}{Q_k} dx_1 \dots dx_{r_k}, \quad \sigma \geq 0.$$

Интеграл $J_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma)$ сходится и при $s_1 = 1$.

ЛЕММА 1. При $\sigma \geq 0$ и натуральных s_j существует производная $J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma)$ (в точке $\sigma = 0$ подразумевается правая производная), она непрерывна,

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{-\ln(1-Q_k)(1-Q_k)^\sigma}{Q_k} dx_1 \dots dx_{r_k}$$

и $J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование, непрерывность и интегральное представление $J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma)$ следуют из равномерной сходимости интеграла

$$\int_{[0,1]^{r_k}} \frac{-\ln(1-Q_k)(1-Q_k)^\sigma}{Q_k} dx_1 \dots dx_{r_k}$$

на луче $\sigma \geq 0$. Из неотрицательности и нетривиальности подынтегрального выражения получаем неравенство $J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) > 0$.

ЛЕММА 2. При натуральных s_j выполняется равенство

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(0) = \tilde{\zeta}(ab^{s_1-1}ab^{s_2-1}\dots ab^{s_k-1}b).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 имеем равенство

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(0) = \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{\ln(1-Q_k)}{Q_k} dx_1 \dots dx_{r_k} = \int_{[0,1]^{r_k+1}} \frac{dx_0 dx_1 \dots dx_{r_k}}{1-x_0 Q_k}.$$

(последнее равенство получаем с помощью [1; лемма 2]). Это доказывает базу индукции. Предполагая, что (2) доказано для $E - 1$, докажем его для $E \geq 1$. Из определения интеграла следует

$$J_{s_1, \dots, s_k}(n) = \int_{[0,1]^{r_k}} (1 + (1 - Q_k) + \dots + (1 - Q_k)^{n-1}) dx_1 \dots dx_{r_k}.$$

Так как $s_1 = 1$, то

$$Q_k(x_1, x_2, \dots, r_k) = x_1 Q_{k-1}(x_2, x_3, \dots, x_{r_k}) = x_1 Q'.$$

Откуда (для $p \geq 1$)

$$\int_{[0,1]^{r_k}} (1 - Q_k)^{p-1} dx_1 \dots dx_{r_k} = \int_{[0,1]^{r_k-1}} \frac{1 - (1 - Q')^p}{pQ'} dx_2 \dots dx_{r_k} = \frac{1}{p} J_{s_2, s_3, \dots, s_k}(p)$$

и

$$J_{s_1, \dots, s_k}(n) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} J_{s_2, s_3, \dots, s_k}(p). \quad (3)$$

Применяя к интегралу $J_{s_2, s_3, \dots, s_k}(p)$ предположение индукции, а затем лемму 3, получим (2). Полагая $n = \lceil \sigma \rceil$ – наименьшее целое, большее либо равное σ , получим

$$J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma) \leq J_{s_1, \dots, s_k}(n) \leq Df_E(n) \leq Df_E(\sigma + 1) \leq C \ln^E(\sigma + 1), \quad C > 0.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно также доказать, что при $\sigma \geq 1$ для интеграла $J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma)$ выполняется оценка

$$J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma) \geq C_2 \ln^E(\sigma + 1), \quad C_2 > 0.$$

ЛЕММА 5. При $t \geq 1$, натуральных s_j и $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ выполняется

$$\frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma_1)}{\sigma_1^t} \leq \frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma_2)}{\sigma_2^t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ и $x_j \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$(1 - x_0 Q_k)^{\sigma_1 - 1} \leq (1 - x_0 Q_k)^{\sigma_2 - 1}.$$

Откуда

$$\int_{[0,1]^{r_k+1}} (1 - x_0 Q_k)^{\sigma_1 - 1} dx_0 dx_1 \dots dx_{r_k} \leq \int_{[0,1]^{r_k+1}} (1 - x_0 Q_k)^{\sigma_2 - 1} dx_0 dx_1 \dots dx_{r_k}.$$

Интегрируя по переменной x_0 , получим

$$\frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma_1)}{\sigma_1} \leq \frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma_2)}{\sigma_2}.$$

Так как при $\sigma > 0$ выполняется $J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma) > 0$, то

$$\frac{\sigma_1^t}{\sigma_2^t} \geq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \geq \frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma_1)}{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma_2)},$$

что равносильно требуемому неравенству.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $\sigma > 0$

$$0 < J'_{s_1, \dots, s_k}(\sigma) \leq \frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma)}{\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что при $\sigma > 0$ и $\Delta\sigma > 0$

$$\frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma + \Delta\sigma)}{\sigma + \Delta\sigma} \leq \frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma)}{\sigma},$$

что равносильно

$$\frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma + \Delta\sigma) - J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma)}{\Delta\sigma} \leq \frac{J_{s_1, \dots, s_k}(\sigma)}{\sigma}.$$

Остается сделать предельный переход $\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0+}$.

ЛЕММА 6. При натуральных s_j выполняются равенства

$$J_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \dots \lim_{s_k^+ \rightarrow s_k+0} \sum_{j=0}^k (-1)^j \zeta_\sigma(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_1^+) \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+), \quad (4)$$

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \dots \lim_{s_k^+ \rightarrow s_k+0} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^j s_i^+ \zeta_\sigma(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_i^+ + 1, \dots, s_1^+) \times \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+), \quad (5)$$

где

$$\zeta_\sigma(s_1, s_2, \dots, s_l) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{1}{(n_1 + \sigma)^{s_1} \dots (n_l + \sigma)^{s_l}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо тождество

$$Q_k(x_1, x_2, \dots, x_{r_k}) = 1 - x_1 \dots x_{s_1-1} (1 - x_{s_1} Q_{k-1}(x_{s_1+1}, x_{s_1+2}, \dots, x_{r_k})).$$

Для краткости обозначим $Q' = Q_{k-1}(x_{s_1+1}, x_{s_1+2}, \dots, x_{r_k})$. Разложим в подынтегральном выражении $1/Q_k$ по степеням $1 - Q_k$ (внутри куба интегрирования $0 < Q_k < 1$):

$$\begin{aligned} J_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) &= \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{1 - (1 - Q_k)^\sigma}{Q_k} dx_1 \dots dx_{r_k} \\ &= \int_{[0,1]^{r_k}} \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - Q_k)^n - (1 - Q_k)^{n+\sigma}] dx_1 \dots dx_{r_k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]^{r_k}} [(x_1 \dots x_{s_1-1} (1 - x_{s_1} Q'))^n - (x_1 \dots x_{s_1-1} (1 - x_{s_1} Q'))^{n+\sigma}] dx_1 \dots dx_{r_k}. \end{aligned}$$

Так как выражение в квадратных скобках неотрицательно, то возможность перестановки интеграла и суммы гарантируется теоремой Фубини (сумму можно представить в виде несобственного интеграла). Проинтегрируем по переменным x_1, x_2, \dots ,

x_{s_1} . Имеем

$$\begin{aligned} J_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1}} - \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1}} \right] \\ &= \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1^+}} - \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Из леммы 4 следует, что при $s_1^+ > 1$ обе суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1^+}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}}$$

сходятся. Обоснуем возможность перестановки знака предела и бесконечной суммы. По лемме 5 имеем оценку

$$0 \leq \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1^+}} - \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}} \leq \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1^+}} - \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n+\lceil \sigma \rceil)}{(n+\lceil \sigma \rceil)^{s_1^+}}. \quad (7)$$

Для произвольного натурального N выполняется

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \left[\frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1^+}} - \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}} \right] \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left[\frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1^+}} - \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n+\lceil \sigma \rceil)}{(n+\lceil \sigma \rceil)^{s_1^+}} \right] \\ &= \sum_{n=N}^{N+\lceil \sigma \rceil-1} \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1^+}} \leq \lceil \sigma \rceil \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(N)}{N^{s_1^+}} \leq \lceil \sigma \rceil \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(N)}{N}. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство леммы 4, получаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n)}{n^{s_1^+}} - \frac{J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}} \right]$$

сходится равномерно на луче $s_1^+ \geq 1$, что и дает возможность перестановки знака предела и бесконечной суммы.

Если $k > 1$, то к $J_{s_2, \dots, s_k}(n)$ и $J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)$ в правой части (6) можно применить формулу (6):

$$\begin{aligned} &J_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) \\ &= \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n_1^{s_1^+}} \lim_{s_2^+ \rightarrow s_2+0} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}} - \frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_1+n_2)}{(n_1+n_2)^{s_2^+}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(n_1+\sigma)^{s_1^+}} \lim_{s_2^+ \rightarrow s_2+0} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}} - \frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_1+n_2+\sigma)}{(n_1+n_2+\sigma)^{s_2^+}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем, что можно переставить знаки $\sum_{n_1=1}^{\infty}$ и $\lim_{s_2^+ \rightarrow s_2+0}$. С помощью (7) и (3) получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}} - \frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_1 + n_2 + \sigma)}{(n_1 + n_2 + \sigma)^{s_2^+}} \right) \\ &\leq \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}} - \frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_1 + n_2 + \lceil \sigma \rceil)}{(n_1 + n_2 + \lceil \sigma \rceil)^{s_2^+}} \right) \\ &= \sum_{n_2=1}^{n_1 + \lceil \sigma \rceil - 1} \frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}} \leq \sum_{n_2=1}^{n_1 + \lceil \sigma \rceil - 1} \frac{J_{s_3, \dots, s_k}(n_2)}{n_2} = J_{1, s_3, \dots, s_k}(n_1 + \lceil \sigma \rceil - 1). \end{aligned}$$

С помощью леммы 4 показывается, что ряд

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{J_{1, s_3, \dots, s_k}(n_1 + \lceil \sigma \rceil - 1)}{(n_1 + \sigma)^{s_1^+}}$$

сходится, а следовательно, можно переставить знак предела и бесконечной суммы для вычитаемого в правой части (8). Аналогично доказывается возможность перестановки и для уменьшаемого. Продолжая последовательно применять (6) к $J_{s_3, \dots, s_k}, J_{s_4, \dots, s_k}, \dots, J_{s_k}$ и переставляя на каждом шаге знаки предела и бесконечных сумм, придем к выражению

$$J_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \dots \lim_{s_k^+ \rightarrow s_k+0} f_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma),$$

где функция $f_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma)$ определяется индуктивно

$$f_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{f_{s_2^+, \dots, s_k^+}(n)}{n^{s_1^+}} - \frac{f_{s_2^+, \dots, s_k^+}(n + \sigma)}{(n + \sigma)^{s_1^+}} \right]$$

с начальным условием $f_{\emptyset} = 1$. Покажем по индукции, что

$$f_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \zeta_{\sigma}(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_1^+) \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+). \tag{9}$$

Равенство для $k = 1$ тривиально проверяется. Предположим, что (9) доказано для $k - 1$, докажем его для k . Подставляя в определение $f_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma)$ вместо $f_{s_2^+, \dots, s_k^+}(n)$ и $f_{s_2^+, \dots, s_k^+}(n + \sigma)$ выражения, верные по предположению индукции, получаем

$$\begin{aligned} &f_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^{s_1^+}} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \zeta_n(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+) \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(n + \sigma)^{s_1^+}} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \zeta_{n+\sigma}(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+) \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+) \right]. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + \sigma)^{s_1^+}} \zeta_{n+\sigma}(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+) = \zeta_{\sigma}(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+, s_1^+)$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s_1^+}} \zeta_n(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+) \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \zeta(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+, s_1^+) \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+) = \tilde{\zeta}(s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу теоремы 1 из [1]. Таким образом, формула (4) доказана.

Равенство (5) получается формальным дифференцированием (4) по σ . Однако в этой форме сложно обосновать возможность перестановки предела и оператора дифференцирования. Поэтому, мы стартуем с первого равенства в (6) и формально дифференцируем его по σ :

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_1 J_{s_2, \dots, s_k}(n + \sigma)}{(n + \sigma)^{s_1+1}} - \frac{J'_{s_2, \dots, s_k}(n + \sigma)}{(n + \sigma)^{s_1}} \right].$$

Учитывая оценки для $J(\sigma)$ и $J'(\sigma)$ (см. лемму 4 и следствие 1), получим равномерную сходимость ряда на луче $\sigma \geq 0$. Тем самым, возможность дифференцирования ряда обоснована. Также при фиксированном σ ряд сходится равномерно на множестве $s_1 \geq 1$, поэтому

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_1^+ J_{s_2, \dots, s_k}(n + \sigma)}{(n + \sigma)^{s_1^++1}} - \frac{J'_{s_2, \dots, s_k}(n + \sigma)}{(n + \sigma)^{s_1^+}} \right]. \tag{10}$$

Применяя (6) и (10) к J_{s_2, \dots, s_k} , J'_{s_2, \dots, s_k} , затем к J_{s_3, \dots, s_k} , J'_{s_3, \dots, s_k} , \dots , J_{s_k} , J'_{s_k} и переставляя на каждом шаге знаки предела и бесконечных сумм, придем к выражению

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \dots \lim_{s_k^+ \rightarrow s_k+0} g_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma),$$

где функция $g_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma)$ определяется индуктивно

$$g_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_1^+ f_{s_2^+, \dots, s_k^+}(n + \sigma)}{(n + \sigma)^{s_1^++1}} - \frac{g_{s_2^+, \dots, s_k^+}(n + \sigma)}{(n + \sigma)^{s_1^+}} \right]$$

с начальным условием $g_0 = 0$. По индукции показывается, что

$$g_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^j s_i^+ \zeta_{\sigma}(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_i^+ + 1, \dots, s_1^+) \tilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Утверждение теоремы следует из формулы (5), примененной к $\sigma = 0$, и леммы 2.

Выведем некоторые следствия из теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для $k = 1$ получаем равенство $\tilde{\zeta}(ab^{s_1}) = s_1\zeta(s_1 + 1)$ или, по определению,

$$\tilde{\zeta}(2, \{1\}_{s_1-1}) = s_1\zeta(s_1 + 1). \tag{11}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. В случае $k = 2$

$$\begin{aligned} &\tilde{\zeta}(ab^{s_1-1}ab^{s_2}) \\ &= \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \lim_{s_2^+ \rightarrow s_2+0} [s_1^+\zeta(s_1^+ + 1)\zeta(s_2^+) - s_2^+\zeta(s_2^+ + 1, s_1^+) - s_1^+\zeta(s_2^+, s_1^+ + 1)] \\ &= \lim_{s_1^+ \rightarrow s_1+0} \lim_{s_2^+ \rightarrow s_2+0} [s_1^+\zeta(s_1^+ + s_2^+ + 1) + s_1^+\zeta(s_1^+ + 1, s_2^+) - s_2^+\zeta(s_2^+ + 1, s_1^+)] \\ &= s_1\zeta(s_1 + s_2 + 1) + s_1\zeta(s_1 + 1, s_2) - s_2\zeta(s_2 + 1, s_1). \end{aligned}$$

Так, при $s_1 = 1$ и $s_2 \geq 1$ получаем

$$\tilde{\zeta}(3, \{1\}_{s_2-1}) = \zeta(s_2 + 2) + \zeta(2, s_2) - s_2\zeta(s_2 + 1, 1), \tag{12}$$

а при $s_1 > 1$ и $s_2 = 1$:

$$\tilde{\zeta}(2, \{1\}_{s_1-2}, 2) = s_1\zeta(s_1 + 2) + s_1\zeta(s_1 + 1, 1) - \zeta(2, s_1).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. При $k = 3$

$$\begin{aligned} &\tilde{\zeta}(ab^{s_1-1}ab^{s_2-1}ab^{s_3}) \\ &= s_1\zeta(s_1 + s_2 + s_3 + 1) + s_1\zeta(s_1 + 1, s_2 + s_3) + s_1\zeta(s_1 + 1, s_2, s_3) \\ &\quad + s_1\zeta(s_1 + s_2 + 1, s_3) + s_3\zeta(s_3 + 1, s_2, s_1) - s_2\zeta(s_2 + s_3 + 1, s_1) \\ &\quad - s_2\zeta(s_2 + 1, s_3, s_1) - s_2\zeta(s_2 + 1, s_1 + s_3) - s_2\zeta(s_2 + 1, s_1, s_3). \end{aligned}$$

Вывод этой формулы аналогичен доказательству следствия 3. При этом используется тривиальное равенство $\tilde{\zeta}(p_1, p_2) = \zeta(p_1 + p_2) + \zeta(p_1, p_2)$, а при перемножении двух кратных дзета-значений используется *стаффл-произведение* (или *гармоническое произведение*; см., например, [4]). Полагая $s_1 = s_2 = 1$, получим равенство

$$\tilde{\zeta}(4, \{1\}_{s_3-1}) = \zeta(s_3 + 3) + \zeta(3, s_3) + s_3\zeta(s_3 + 1, 1, 1) - \zeta(s_3 + 2, 1) - \zeta(2, s_3, 1). \tag{13}$$

Можно получить (более громоздкие) формулы и для последующих значений k . Для этого достаточно до предельного перехода представить значения $\tilde{\zeta}$ в виде линейной комбинации ζ (см., например, [5; предложение 2]), а затем ко всем двойным произведениям ζ применить стаффл-соотношение.

Если для вектора $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ обозначить *вес* $w(\vec{s}) = s_1 + s_2 + \dots + s_l$, то равенства (11)–(13) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{s_1 \geq 2, w(\vec{s})=m} \zeta(\vec{s}) = (m - 1)\zeta(m), \tag{14} \quad m \geq 2,$$

$$\sum_{s_1 \geq 3, w(\vec{s})=m} \zeta(\vec{s}) = \zeta(m) + \zeta(2, m - 2) - (m - 2)\zeta(m - 1, 1), \tag{15} \quad m \geq 3,$$

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 \geq 4, w(\vec{s})=m} \zeta(\vec{s}) &= \zeta(m) + \zeta(3, m - 3) + (m - 3)\zeta(m - 2, 1, 1) \\ &\quad - \zeta(m - 1, 1) - \zeta(2, m - 3, 1), \tag{16} \quad m \geq 4. \end{aligned}$$

Равенство (14) можно также получить сложением формул для полной суммы кратных дзета-значений веса m и длины l (см. [6])

$$\sum_{s_1 \geq 2, s_1 + \dots + s_l = m} \zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) = \zeta(m)$$

для $l = 1, 2, \dots, m - 1$. К правой части (15) также можно применить известный результат. Из соотношений Оно (см. [7; теорема 1]) следует, что

$$\sum_{s_1 \geq 3, s_1 + \dots + s_l = m} \zeta(\vec{s}) = \sum_{j=l+1}^{m-1} \zeta(j, m-j).$$

Складывая эти равенства для $l = 1, 2, \dots, m - 2$, получаем

$$\sum_{s_1 \geq 3, w(\vec{s}) = m} \zeta(\vec{s}) = \sum_{j=2}^{m-1} (j-1)\zeta(j, m-j).$$

Сравнивая с левой частью (15), находим

$$\sum_{j=2}^{m-1} (j-1)\zeta(j, m-j) = \zeta(m) + \zeta(2, m-2) - (m-2)\zeta(m-1, 1).$$

Это равенство несложно доказывается непосредственно через ряды.

Равенства (11)–(13) имеют следующее обобщение.

ТЕОРЕМА 4. *Для $l \geq 2, n \geq 1$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(l, \{1\}_{n-1}) &= \sum_{j=0}^{l-3} (-1)^j \zeta(l-j-1, n, \{1\}_j) \\ &+ \sum_{j=0}^{l-3} (-1)^j \zeta(n+l-j-1, \{1\}_j) + (-1)^l n \zeta(n+1, \{1\}_{l-2}). \end{aligned}$$

В случае $l = 2$ суммы $\sum_{j=0}^{l-3}$ полагаются нулевыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s > 1, t > 1$ – некоторые действительные числа. Определим следующие производящие функции:

$$\begin{aligned} F_\sigma(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta_\sigma(\{s\}_k) x^k, & G(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\zeta}(\{s\}_{k-1}, t) x^k, \\ E_\sigma(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\zeta_\sigma(t, \{s\}_{k-1}) - \zeta_\sigma(\{s\}_k)) x^k, \\ H_\sigma(x) &= F_\sigma(x)G(x) + E_\sigma(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Тогда

$$H_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \tilde{\zeta}(\{s\}_{k-j-1}, t) \zeta(\{s\}_j) + (-1)^k \zeta(t, \{s\}_{k-1}) \right) x^k.$$

По теореме 3 из [1] выражение в больших скобках равно нулю и, следовательно, $H_0(x) = 1$. Откуда

$$F_0(x)G(x) = 1 - E_0(x). \tag{18}$$

Далее, по теореме 2 из [1]

$$F_\sigma(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{(j + \sigma)^s}\right)^{-1}$$

и

$$\frac{d}{d\sigma} [F_\sigma(x)]_{\sigma=0} = F_0(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x/j^s} \frac{sx}{j^{s+1}} = F_0(x) \sum_{k=1}^{\infty} s\zeta(ks + 1)x^k.$$

Продифференцируем по σ равенство (17), подставим $\sigma = 0$ и воспользуемся (18):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} [H_\sigma(x)]_{\sigma=0} &= \frac{d}{d\sigma} [F_\sigma(x)]_{\sigma=0}G(x) + \frac{d}{d\sigma} [E_\sigma(x)]_{\sigma=0} \\ &= F_0(x)G(x) \sum_{k=1}^{\infty} s\zeta(ks + 1)x^k + \frac{d}{d\sigma} [E_\sigma(x)]_{\sigma=0} \\ &= (1 - E_0(x)) \sum_{k=1}^{\infty} s\zeta(ks + 1)x^k + \frac{d}{d\sigma} [E_\sigma(x)]_{\sigma=0}. \end{aligned}$$

Подставляя определения рядов $H_\sigma(x)$ и $E_\sigma(x)$ и сравнивая коэффициенты при x^k с $k \geq 1$, получим равенство

$$\begin{aligned} s \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \tilde{\zeta}(\{s\}_{k-j-1}, t) \sum_{i=1}^j \zeta(\{s\}_{i-1}, s + 1, \{s\}_{j-i}) \\ + (-1)^{k-1} \left(t\zeta(t + 1, \{s\}_{k-1}) + s \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(t, \{s\}_{i-1}, s + 1, \{s\}_{k-i-1}) \right) \\ = s \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{j+1} (\zeta(\{s\}_{j+1}) - \zeta(t, \{s\}_j)) \zeta((k - j - 1)s + 1) + s\zeta(ks + 1) \\ + (-1)^{k-1} \left(t\zeta(t + 1, \{s\}_{k-1}) + s \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(t, \{s\}_{i-1}, s + 1, \{s\}_{k-i-1}) \right. \\ \left. - s \sum_{i=1}^k \zeta(\{s\}_{i-1}, s + 1, \{s\}_{k-i}) \right). \tag{19} \end{aligned}$$

Заметим, что по теореме 3 предел $\lim_{s \rightarrow 1+0} \lim_{t \rightarrow n+0}$ левой части (19) равен $\tilde{\zeta}(k + 1, \{1\}_{n-1})$. Прежде чем найти тот же предел правой части (19), представим ее в виде $S_1 + S_2$, где

$$\begin{aligned} S_1 &= s \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(t, \{s\}_j) \zeta((k - j - 1)s + 1) \\ &+ (-1)^{k-1} \left(t\zeta(t + 1, \{s\}_{k-1}) + s \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(t, \{s\}_{i-1}, s + 1, \{s\}_{k-i-1}) \right), \end{aligned}$$

$$S_2 = s \left(\sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{j+1} \zeta(\{s\}_{j+1}) \zeta((k-j-1)s+1) + \zeta(ks+1) \right. \\ \left. + (-1)^k \sum_{i=1}^k \zeta(\{s\}_{i-1}, s+1, \{s\}_{k-i}) \right),$$

и проделаем некоторые преобразования. Из стаффл-произведения следует, что

$$\zeta(t, \{s\}_j) \zeta((k-j-1)s+1) = \zeta((k-j-1)s+1, t, \{s\}_j) + \zeta(t+(k-j-1)s+1, \{s\}_j) \\ + \sum_{i=1}^{j+1} \zeta(t, \{s\}_{i-1}, (k-j-1)s+1, \{s\}_{j-i+1}) \\ + \sum_{i=1}^j \zeta(t, \{s\}_{i-1}, (k-j)s+1, \{s\}_{j-i}).$$

Суммируя эти равенства по j от 0 до $k-2$ со знаком $(-1)^j$, получим

$$S_1 = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta((k-j-1)s+1, t, \{s\}_j) \\ + \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(t+(k-j-1)s+1, \{s\}_j) + (-1)^{k-1} t \zeta(t+1, \{s\}_{k-1}). \quad (20)$$

Аналогично показывается, что

$$S_2 = 0. \quad (21)$$

Переходя к пределу $\lim_{s \rightarrow 1+0} \lim_{t \rightarrow n+0}$ в равенстве (19) и используя (20) и (21), получаем утверждение теоремы (для $l = k+1$).

СЛЕДСТВИЕ 5. Для $m \geq k \geq 2$ справедливо равенство

$$\sum_{s_1 \geq k, w(\vec{s})=m} \zeta(\vec{s}) = \sum_{j=0}^{k-3} (-1)^j \zeta(k-j-1, m-k+1, \{1\}_j) + \sum_{j=0}^{k-3} (-1)^j \zeta(m-j, \{1\}_j) \\ + (-1)^k (m-k+1) \zeta(m-k+2, \{1\}_{k-2}).$$

Это следствие обобщает равенства (14)–(16).

Результат теоремы 4 не является полностью новым. Так, в [8] была определена функция

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \text{Li}_k(1 - e^{-t}) dt,$$

где $\text{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^\infty z^n/n^k$. В [7; теорема 2] было доказано, что для натуральных k и n справедливо выражение

$$\xi_k(n) = \tilde{\zeta}(k+1, \{1\}_{n-1}).$$

Таким образом, из доказанного в [8; теорема 6] равенства

$$\xi_k(s) = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(s, \{1\}_j) \zeta(k-j) + (-1)^{k-1} \times \left(s \zeta(s+1, \{1\}_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(s, \{1\}_{i-1}, 2, \{1\}_{k-i-1}) \right)$$

выводится утверждение теоремы 4 точно так же, как мы вывели его, используя (19).

Отметим также, что в [9; следствие 1] было доказано равенство

$$\sum_{j=0}^{m-2} \tilde{\zeta}(m-j, \{1\}_j) = \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{m-j}(j) = 2(m-1)(1-2^{1-m})\zeta(m).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Злобин, “Производящие функции для значений кратной дзета-функции”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 2, 55–59.
- [2] Д. В. Васильев, “Некоторые формулы для дзета-функции Римана в целых точках”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, № 1, 81–84.
- [3] С. А. Злобин, “О некоторых интегральных тождествах”, *УМН*, **57:3** (2002), 153–154.
- [4] М. Е. Hoffman, “The algebra of multiple harmonic series”, *J. Algebra*, **194:2** (1997), 477–495.
- [5] Е. А. Уланский, “Тождества для обобщенных полилогарифмов”, *Матем. заметки*, **73:4** (2003), 613–624.
- [6] А. Granville, “A decomposition of Riemann’s zeta-function”, *Analytic Number Theory* (Kyoto, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **247**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 95–101.
- [7] Y. Ohno, “A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values”, *J. Number Theory*, **74:1** (1999), 39–43.
- [8] T. Arakawa, M. Kaneko, “Multiple zeta-values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions”, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 1–21.
- [9] T. Aoki, Y. Ohno, “Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **41:2** (2005), 329–337; [arXiv: math/0307264v1](https://arxiv.org/abs/math/0307264v1).

С. А. Злобин

ООО “Аби Продакшн”

E-mail: sirg_zlobin@mail.ru

Поступило

17.07.2007