Математические заметки

Том 84 выпуск 6 декабрь 2008

УДК 511.3+517.5

Соотношения для кратных дзета-значений

С. А. Злобин

Мы доказываем новые соотношения для кратных дзета-значений. Из них, в частности, следуют равенство Васильева и формула суммирования кратных дзета-значений фиксированного веса с ограничением на первую координату.

Библиография: 9 названий.

В работе [1] доказывается теорема, связывающая значения кратных дзета-функций двух типов

$$\zeta(s_1,s_2,\dots,s_l)=\sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_l^{s_l}},$$

$$\widetilde{\zeta}(s_1,s_2,\dots,s_l)=\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\dots\geqslant n_l\geqslant 1}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_l^{s_l}}.$$

Для удобства полагается $\zeta(\emptyset)=\widetilde{\zeta}(\emptyset)=1$ (здесь под символом $\emptyset$ понимается нулевой вектор).

Обозначим через $\{p\}_l$ l-мерный вектор, все координаты которого равны p.

Теорема 1 (см. [1; теорема 4]). *При натуральных $s_j>1$ справедливо равенство*

$$\widetilde{\zeta}(2,\{1\}_{s_1-2},2,\{1\}_{s_2-2},2,\{1\}_{s_k-2},1) \\ =\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{j}s_i\zeta(s_j,s_{j-1},\dots,s_i+1,\dots,s_1)\widetilde{\zeta}(s_{j+1},s_{j+2},\dots,s_k).$$

Из этой теоремы, в частности, следует обобщение равенства Васильева

$$\widetilde{\zeta}(\{2\}_k,1)=2\zeta(2k+1)$$

(по сути доказанного в [2]):

Теорема 2 (см. [1; теорема 5]). *При натуральных k, $s\geqslant 2$ выполняется равенство*

$$\widetilde{\zeta}(\{2,\{1\}_{s-2}\}_k,1)=s\zeta(sk+1).$$

Оказывается, теорему 1 можно обобщить и на случай, когда существуют значения $s_j=1$. Результат легче сформулировать в терминах слов в алфавите $\{a,b\}$. По определению

$$\widetilde{\zeta}(a^{s_1-1}ba^{s_2-1}b\cdots a^{s_l-1}b)=\widetilde{\zeta}(s_1,s_2,\dots,s_l).$$

Теорема 3. *При натуральных s_j справедливо равенство*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\zeta}(ab^{s_1-1}ab^{s_2-1}\cdots ab^{s_k-1}b)\\
&\qquad=\lim_{s_1^+\to s_1+0}\cdots\lim_{s_k^+\to s_k+0}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{j}s_i^+\zeta(s_j^+,s_{j-1}^+,\dots,s_i^++1,\dots,s_1^+)\\
&\qquad\qquad\times\widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+,s_{j+2}^+,\dots,s_k^+).
\end{aligned}$$

В случае, когда все $s_j>1$, мы получаем теорему 1. Заметим также, что в левой части может стоять любое слово, начинающееся на a и оканчивающееся на b (что равносильно тому, что вектор $\vec{s}$ – произвольный с натуральными s_j и $s_1>1$).

Ключевым в доказательстве теоремы 1 является вычисление интеграла

$$I_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)=\int_{[0,1]^{r_k}}\frac{(1-Q_k)^\sigma}{Q_k}\,dx_1\dots dx_{r_k},\qquad\sigma\geqslant 0,$$

где $r_j=\sum_{i=1}^j s_i$ и

$$Q_0=1,\qquad Q_k=1-x_1\cdots x_{r_1-1}+x_1\cdots x_{r_1}-\dots-x_1\cdots x_{r_k-1}+x_1\cdots x_{r_k}.$$

Чтобы избежать проблем со сходимостью интеграла при $s_1=1$, мы будем рассматривать интегралы

$$J_\emptyset=1,\qquad J_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)=\int_{[0,1]^{r_k}}\frac{1-(1-Q_k)^\sigma}{Q_k}\,dx_1\dots dx_{r_k},\quad\sigma\geqslant 0.$$

Интеграл $J_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)$ сходится и при $s_1=1$.

Лемма 1. *При $\sigma\geqslant 0$ и натуральных s_j существует производная $J'_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)$ (в точке $\sigma=0$ подразумевается правая производная), она непрерывна,*

$$J'_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)=\int_{[0,1]^{r_k}}\frac{-\ln(1-Q_k)(1-Q_k)^\sigma}{Q_k}\,dx_1\dots dx_{r_k}$$

и $J'_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)>0$.

Доказательство. Существование, непрерывность и интегральное представление $J'_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)$ следуют из равномерной сходимости интеграла

$$\int_{[0,1]^{r_k}}\frac{-\ln(1-Q_k)(1-Q_k)^\sigma}{Q_k}\,dx_1\dots dx_{r_k}$$

на луче $\sigma\geqslant 0$. Из неотрицательности и нетривиальности подынтегрального выражения получаем неравенство $J'_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)>0$.

Лемма 2. *При натуральных s_j выполняется равенство*

$$J'_{s_1,s_2,\dots,s_k}(0)=\widetilde{\zeta}(ab^{s_1-1}ab^{s_2-1}\cdots ab^{s_k-1}b).$$

Доказательство. По лемме 1 имеем равенство

$$J'_{s_1,s_2,\dots,s_k}(0)=\int_{[0,1]^{r_k}}-\frac{\ln(1-Q_k)}{Q_k}\,dx_1\dots dx_{r_k}=\int_{[0,1]^{r_k+1}}\frac{dx_0dx_1\dots dx_{r_k}}{1-x_0Q_k}\,.$$

Теперь сделаем в интеграле замену $x_{r_k} \to 1 - x_{r_k}$ и представим

$$1 - x_0 Q_k(x_1, x_2, \dots, 1 - x_{r_k})$$

в виде (добавляя и вычитая некоторые слагаемые)

$$\begin{aligned} 1 - x_0 &+ x_0x_1 - x_0x_1 + x_0x_1x_2 - \dots - x_0x_1\cdots x_{r_1-2} + x_0x_1\cdots x_{r_1-1} \\ &- x_0x_1\cdots x_{r_1} + x_0x_1\cdots x_{r_1+1} - \dots - x_0x_1\cdots x_{r_2-2} + x_0x_1\cdots x_{r_2-1} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &- x_0x_1\cdots x_{r_{k-1}} + x_0x_1\cdots x_{r_{k-1}+1} - \dots - x_0x_1\cdots x_{r_k-2} + x_0x_1\cdots x_{r_k-1} \\ &- x_0x_1\cdots x_{r_k-1} + x_0x_1\cdots x_{r_k}, \end{aligned}$$

а затем применим лемму 2 из [1] (или теорему 1 из [3] с $a_i = 1$, $b_i = 2$ и устремим $z \to 1 - 0$).

Лемма 3. *Для любого натурального E справедлива оценка*

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{f_{E-1}(p)}{p} \leqslant f_E(n), \qquad f_E(x) = \sum_{r=0}^{E} \frac{\ln^r x}{r!}\,. \tag{1}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что $f_E(x)/x$ монотонно убывает при $x \geqslant 1$. Для непрерывной и монотонно убывающей на отрезке $[1, n]$ функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$\sum_{p=1}^{n} f(p) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{f_{E-1}(p)}{p} \leqslant 1 + \int_1^n \sum_{r=0}^{E-1} \frac{\ln^r x}{r!\,x}\,dx = \sum_{r=0}^{E} \frac{\ln^r n}{r!} = f_E(n).$$

Лемма 4. *Пусть s_j, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, – натуральные числа и E – наибольшее целое такое, что $s_j = 1$ при $j = 1, 2, \dots, E$. Тогда при $\sigma \geqslant 1$ для интеграла $J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma)$ выполняется оценка*

$$J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma) \leqslant C \ln^E(\sigma + 1),$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от σ.

Доказательство. Докажем индукцией по E, что для натуральных n выполняется неравенство

$$J_{s_1,\dots,s_k}(n) \leqslant D f_E(n), \qquad f_E(x) = \sum_{r=0}^{E} \frac{\ln^r x}{r!}\,, \tag{2}$$

где $D > 0$ – константа, не зависящая от n. Если $E = 0$, то $s_1 \geqslant 2$ и при $n \geqslant 1$

$$J_{s_1,\dots,s_k}(n) \leqslant \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{dx_1 \dots dx_{r_k}}{Q_k} = \widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \dots, s_k)$$

(последнее равенство получаем с помощью [1; лемма 2]). Это доказывает базу индукции. Предполагая, что (2) доказано для $E-1$, докажем его для $E \geqslant 1$. Из определения интеграла следует

$$J_{s_1,\dots,s_k}(n) = \int_{[0,1]^{r_k}} (1 + (1-Q_k) + \dots + (1-Q_k)^{n-1})\, dx_1 \dots dx_{r_k}.$$

Так как $s_1 = 1$, то

$$Q_k(x_1, x_2, \dots, r_k) = x_1 Q_{k-1}(x_2, x_3, \dots, x_{r_k}) = x_1 Q'.$$

Откуда (для $p \geqslant 1$)

$$\int_{[0,1]^{r_k}} (1-Q_k)^{p-1}\, dx_1 \dots dx_{r_k} = \int_{[0,1]^{r_k-1}} \frac{1-(1-Q')^p}{pQ'}\, dx_2 \dots dx_{r_k} = \frac{1}{p} J_{s_2,s_3,\dots,s_k}(p)$$

и

$$J_{s_1,\dots,s_k}(n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} J_{s_2,s_3,\dots,s_k}(p). \tag{3}$$

Применяя к интегралу $J_{s_2,s_3,\dots,s_k}(p)$ предположение индукции, а затем лемму 3, получим (2). Полагая $n = \lceil \sigma \rceil$ – наименьшее целое, большее либо равное σ, получим

$$J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma) \leqslant J_{s_1,\dots,s_k}(n) \leqslant D f_E(n) \leqslant D f_E(\sigma+1) \leqslant C \ln^E(\sigma+1), \qquad C > 0.$$

Лемма доказана.

Замечание. Можно также доказать, что при $\sigma \geqslant 1$ для интеграла $J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma)$ выполняется оценка

$$J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma) \geqslant C_2 \ln^E(\sigma+1), \qquad C_2 > 0.$$

Лемма 5. *При $t \geqslant 1$, натуральных s_j и $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ выполняется*

$$\frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma_1)}{\sigma_1^t} \leqslant \frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma_2)}{\sigma_2^t}.$$

Доказательство. При $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ и $x_j \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$(1 - x_0 Q_k)^{\sigma_1 - 1} \leqslant (1 - x_0 Q_k)^{\sigma_2 - 1}.$$

Откуда

$$\int_{[0,1]^{r_k+1}} (1 - x_0 Q_k)^{\sigma_1 - 1} dx_0 dx_1 \dots dx_{r_k} \leqslant \int_{[0,1]^{r_k+1}} (1 - x_0 Q_k)^{\sigma_2 - 1} dx_0 dx_1 \dots dx_{r_k}.$$

Интегрируя по переменной x_0, получим

$$\frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma_1)}{\sigma_1} \leqslant \frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma_2)}{\sigma_2}.$$

Так как при $\sigma > 0$ выполняется $J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma) > 0$, то

$$\frac{\sigma_1^t}{\sigma_2^t} \geqslant \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \geqslant \frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma_1)}{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma_2)},$$

что равносильно требуемому неравенству.

Следствие 1. *При* $\sigma > 0$

$$0 < J'_{s_1,\dots,s_k}(\sigma) \leqslant \frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma)}{\sigma}\,.$$

Доказательство. Из леммы 5 следует, что при $\sigma > 0$ и $\Delta\sigma > 0$

$$\frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma+\Delta\sigma)}{\sigma+\Delta\sigma} \leqslant \frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma)}{\sigma}\,,$$

что равносильно

$$\frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma+\Delta\sigma) - J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma)}{\Delta\sigma} \leqslant \frac{J_{s_1,\dots,s_k}(\sigma)}{\sigma}\,.$$

Остается сделать предельный переход $\lim_{\Delta\sigma\to 0+}$.

Лемма 6. *При натуральных* s_j *выполняются равенства*

$$J_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+\to s_1+0}\dots\lim_{s_k^+\to s_k+0}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\zeta_\sigma(s_j^+,s_{j-1}^+,\dots,s_1^+)\widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+,s_{j+2}^+,\dots,s_k^+), \tag{4}$$

$$J'_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+\to s_1+0}\dots\lim_{s_k^+\to s_k+0}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{j}s_i^+\zeta_\sigma(s_j^+,s_{j-1}^+,\dots,s_i^++1,\dots,s_1^+) \times\widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+,s_{j+2}^+,\dots,s_k^+), \tag{5}$$

где

$$\zeta_\sigma(s_1,s_2,\dots,s_l) = \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1}\frac{1}{(n_1+\sigma)^{s_1}\cdots(n_l+\sigma)^{s_l}}\,.$$

Доказательство. Справедливо тождество

$$Q_k(x_1,x_2,\dots,x_{r_k}) = 1 - x_1\cdots x_{s_1-1}(1 - x_{s_1}Q_{k-1}(x_{s_1+1},x_{s_1+2},\dots,x_{r_k})).$$

Для краткости обозначим $Q' = Q_{k-1}(x_{s_1+1},x_{s_1+2},\dots,x_{r_k})$. Разложим в подынтегральном выражении $1/Q_k$ по степеням $1-Q_k$ (внутри куба интегрирования $0 < Q_k < 1$):

$$\begin{aligned}
J_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma) &= \int_{[0,1]^{r_k}}\frac{1-(1-Q_k)^\sigma}{Q_k}\,dx_1\dots dx_{r_k}\\
&= \int_{[0,1]^{r_k}}\sum_{n=0}^{\infty}[(1-Q_k)^n-(1-Q_k)^{n+\sigma}]\,dx_1\dots dx_{r_k}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,1]^{r_k}}\bigl[(x_1\cdots x_{s_1-1}(1-x_{s_1}Q'))^n\\
&\qquad - (x_1\cdots x_{s_1-1}(1-x_{s_1}Q'))^{n+\sigma}\bigr]\,dx_1\dots dx_{r_k}.
\end{aligned}$$

Так как выражение в квадратных скобках неотрицательно, то возможность перестановки интеграла и суммы гарантируется теоремой Фубини (сумму можно представить в виде несобственного интеграла). Проинтегрируем по переменным $x_1, x_2, \dots,$

x_{s_1}. Имеем

$$J_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\biggl[\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1}}-\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1}}\biggr]$$
$$=\lim_{s_1^+\to s_1+0}\sum_{n=1}^{\infty}\biggl[\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1^+}}-\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}}\biggr]. \qquad (6)$$

Из леммы 4 следует, что при $s_1^+>1$ обе суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1^+}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}}$$

сходятся. Обоснуем возможность перестановки знака предела и бесконечной суммы. По лемме 5 имеем оценку

$$0\leqslant\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1^+}}-\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}}\leqslant\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1^+}}-\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n+\lceil\sigma\rceil)}{(n+\lceil\sigma\rceil)^{s_1^+}}. \qquad (7)$$

Для произвольного натурального N выполняется

$$0\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}\biggl[\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1^+}}-\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}}\biggr]\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}\biggl[\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1^+}}-\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n+\lceil\sigma\rceil)}{(n+\lceil\sigma\rceil)^{s_1^+}}\biggr]$$
$$=\sum_{n=N}^{N+\lceil\sigma\rceil-1}\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1^+}}\leqslant\lceil\sigma\rceil\,\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(N)}{N^{s_1^+}}\leqslant\lceil\sigma\rceil\,\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(N)}{N}.$$

Учитывая неравенство леммы 4, получаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\biggl[\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n)}{n^{s_1^+}}-\frac{J_{s_2,\dots,s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}}\biggr]$$

сходится равномерно на луче $s_1^+\geqslant1$, что и дает возможность перестановки знака предела и бесконечной суммы.

Если $k>1$, то к $J_{s_2,\dots,s_k}(n)$ и $J_{s_2,\dots,s_k}(n+\sigma)$ в правой части (6) можно применить формулу (6):

$$J_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma)$$
$$=\lim_{s_1^+\to s_1+0}\sum_{n_1=1}^{\infty}\biggl[\frac{1}{n_1^{s_1^+}}\lim_{s_2^+\to s_2+0}\sum_{n_2=1}^{\infty}\biggl(\frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}}-\frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_1+n_2)}{(n_1+n_2)^{s_2^+}}\biggr)$$
$$-\frac{1}{(n_1+\sigma)^{s_1^+}}\lim_{s_2^+\to s_2+0}\sum_{n_2=1}^{\infty}\biggl(\frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}}-\frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_1+n_2+\sigma)}{(n_1+n_2+\sigma)^{s_2^+}}\biggr)\biggr]. \qquad (8)$$

Покажем, что можно переставить знаки $\sum_{n_1=1}^{\infty}$ и $\lim_{s_2^+\to s_2+0}$. С помощью (7) и (3) получаем, что

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{n_2=1}^{\infty}\left(\frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}} - \frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_1+n_2+\sigma)}{(n_1+n_2+\sigma)^{s_2^+}}\right)\\
&\leqslant \sum_{n_2=1}^{\infty}\left(\frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}} - \frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_1+n_2+\lceil\sigma\rceil)}{(n_1+n_2+\lceil\sigma\rceil)^{s_2^+}}\right)\\
&= \sum_{n_2=1}^{n_1+\lceil\sigma\rceil-1}\frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_2)}{n_2^{s_2^+}} \leqslant \sum_{n_2=1}^{n_1+\lceil\sigma\rceil-1}\frac{J_{s_3,\dots,s_k}(n_2)}{n_2} = J_{1,s_3,\dots,s_k}(n_1+\lceil\sigma\rceil-1).
\end{aligned}$$

С помощью леммы 4 показывается, что ряд

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{J_{1,s_3,\dots,s_k}(n_1+\lceil\sigma\rceil-1)}{(n_1+\sigma)^{s_1^+}}$$

сходится, а следовательно, можно переставить знак предела и бесконечной суммы для вычитаемого в правой части (8). Аналогично доказывается возможность перестановки и для уменьшаемого. Продолжая последовательно применять (6) к $J_{s_3,\dots,s_k}, J_{s_4,\dots,s_k},\dots,J_{s_k}$ и переставляя на каждом шаге знаки предела и бесконечных сумм, придем к выражению

$$J_{s_1,s_2,\dots,s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+\to s_1+0}\dots\lim_{s_k^+\to s_k+0} f_{s_1^+,s_2^+,\dots,s_k^+}(\sigma),$$

где функция $f_{s_1^+,s_2^+,\dots,s_k^+}(\sigma)$ определяется индуктивно

$$f_{s_1^+,s_2^+,\dots,s_k^+}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{f_{s_2^+,\dots,s_k^+}(n)}{n^{s_1^+}} - \frac{f_{s_2^+,\dots,s_k^+}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}}\right]$$

с начальным условием $f_\emptyset = 1$. Покажем по индукции, что

$$f_{s_1^+,s_2^+,\dots,s_k^+}(\sigma) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\zeta_\sigma(s_j^+,s_{j-1}^+,\dots,s_1^+)\widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+,s_{j+2}^+,\dots,s_k^+). \tag{9}$$

Равенство для $k=1$ тривиально проверяется. Предположим, что (9) доказано для $k-1$, докажем его для k. Подставляя в определение $f_{s_1^+,s_2^+,\dots,s_k^+}(\sigma)$ вместо $f_{s_2^+,\dots,s_k^+}(n)$ и $f_{s_2^+,\dots,s_k^+}(n+\sigma)$ выражения, верные по предположению индукции, получаем

$$\begin{aligned}
&f_{s_1^+,s_2^+,\dots,s_k^+}(\sigma)\\
&\quad= \sum_{n=1}^{\infty}\biggl[\frac{1}{n^{s_1^+}}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\zeta_n(s_j^+,s_{j-1}^+,\dots,s_2^+)\widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+,s_{j+2}^+,\dots,s_k^+)\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{(n+\sigma)^{s_1^+}}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\zeta_{n+\sigma}(s_j^+,s_{j-1}^+,\dots,s_2^+)\widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+,s_{j+2}^+,\dots,s_k^+)\biggr].
\end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sigma)^{s_1^+}} \zeta_{n+\sigma}(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+) = \zeta_\sigma(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+, s_1^+)$$

и

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s_1^+}} \zeta_n(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+) \widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+)$$
$$= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} \zeta(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_2^+, s_1^+) \widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+) = \widetilde{\zeta}(s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+).$$

Последнее равенство справедливо в силу теоремы 1 из [1]. Таким образом, формула (4) доказана.

Равенство (5) получается формальным дифференцированием (4) по σ. Однако в этой форме сложно обосновать возможность перестановки предела и оператора дифференцирования. Поэтому, мы стартуем с первого равенства в (6) и формально дифференцируем его по σ:

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_1 J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1+1}} - \frac{J'_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1}} \right].$$

Учитывая оценки для $J(\sigma)$ и $J'(\sigma)$ (см. лемму 4 и следствие 1), получим равномерную сходимость ряда на луче $\sigma \geqslant 0$. Тем самым, возможность дифференцирования ряда обоснована. Также при фиксированном σ ряд сходится равномерно на множестве $s_1 \geqslant 1$, поэтому

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+ \to s_1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_1^+ J_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+ + 1}} - \frac{J'_{s_2, \dots, s_k}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}} \right]. \tag{10}$$

Применяя (6) и (10) к $J_{s_2, \dots, s_k}$, $J'_{s_2, \dots, s_k}$, затем к $J_{s_3, \dots, s_k}$, $J'_{s_3, \dots, s_k}, \dots, J_{s_k}, J'_{s_k}$ и переставляя на каждом шаге знаки предела и бесконечных сумм, придем к выражению

$$J'_{s_1, s_2, \dots, s_k}(\sigma) = \lim_{s_1^+ \to s_1+0} \cdots \lim_{s_k^+ \to s_k+0} g_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma),$$

где функция $g_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma)$ определяется индуктивно

$$g_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_1^+ f_{s_2^+, \dots, s_k^+}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+ + 1}} - \frac{g_{s_2^+, \dots, s_k^+}(n+\sigma)}{(n+\sigma)^{s_1^+}} \right]$$

с начальным условием $g_\emptyset = 0$. По индукции показывается, что

$$g_{s_1^+, s_2^+, \dots, s_k^+}(\sigma) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{j} s_i^+ \zeta_\sigma(s_j^+, s_{j-1}^+, \dots, s_i^+ + 1, \dots, s_1^+) \widetilde{\zeta}(s_{j+1}^+, s_{j+2}^+, \dots, s_k^+).$$

Доказательство теоремы 3. Утверждение теоремы следует из формулы (5), примененной к $\sigma = 0$, и леммы 2.

Выведем некоторые следствия из теоремы 3.

Следствие 2. *Для $k=1$ получаем равенство $\widetilde{\zeta}(ab^{s_1})=s_1\zeta(s_1+1)$ или, по определению,*

$$\widetilde{\zeta}(2,\{1\}_{s_1-1})=s_1\zeta(s_1+1). \tag{11}$$

Следствие 3. *В случае $k=2$*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\zeta}(ab^{s_1-1}ab^{s_2})\\
&\quad=\lim_{s_1^+\to s_1+0}\lim_{s_2^+\to s_2+0}\bigl[s_1^+\zeta(s_1^++1)\zeta(s_2^+)-s_2^+\zeta(s_2^++1,s_1^+)-s_1^+\zeta(s_2^+,s_1^++1)\bigr]\\
&\quad=\lim_{s_1^+\to s_1+0}\lim_{s_2^+\to s_2+0}\bigl[s_1^+\zeta(s_1^++s_2^++1)+s_1^+\zeta(s_1^++1,s_2^+)-s_2^+\zeta(s_2^++1,s_1^+)\bigr]\\
&\quad=s_1\zeta(s_1+s_2+1)+s_1\zeta(s_1+1,s_2)-s_2\zeta(s_2+1,s_1).
\end{aligned}$$

Так, при $s_1=1$ и $s_2\geqslant 1$ получаем

$$\widetilde{\zeta}(3,\{1\}_{s_2-1})=\zeta(s_2+2)+\zeta(2,s_2)-s_2\zeta(s_2+1,1), \tag{12}$$

а при $s_1>1$ и $s_2=1$:

$$\widetilde{\zeta}(2,\{1\}_{s_1-2},2)=s_1\zeta(s_1+2)+s_1\zeta(s_1+1,1)-\zeta(2,s_1).$$

Следствие 4. *При $k=3$*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\zeta}(ab^{s_1-1}ab^{s_2-1}ab^{s_3})\\
&\quad=s_1\zeta(s_1+s_2+s_3+1)+s_1\zeta(s_1+1,s_2+s_3)+s_1\zeta(s_1+1,s_2,s_3)\\
&\qquad+s_1\zeta(s_1+s_2+1,s_3)+s_3\zeta(s_3+1,s_2,s_1)-s_2\zeta(s_2+s_3+1,s_1)\\
&\qquad-s_2\zeta(s_2+1,s_3,s_1)-s_2\zeta(s_2+1,s_1+s_3)-s_2\zeta(s_2+1,s_1,s_3).
\end{aligned}$$

Вывод этой формулы аналогичен доказательству следствия 3. При этом используется тривиальное равенство $\widetilde{\zeta}(p_1,p_2)=\zeta(p_1+p_2)+\zeta(p_1,p_2)$, а при перемножении двух кратных дзета-значений используется *стаффл-произведение* (или *гармоническое произведение*; см., например, [4]). Полагая $s_1=s_2=1$, получим равенство

$$\widetilde{\zeta}(4,\{1\}_{s_3-1})=\zeta(s_3+3)+\zeta(3,s_3)+s_3\zeta(s_3+1,1,1)-\zeta(s_3+2,1)-\zeta(2,s_3,1). \tag{13}$$

Можно получить (более громоздкие) формулы и для последующих значений k. Для этого достаточно до предельного перехода представить значения $\widetilde{\zeta}$ в виде линейной комбинации ζ (см., например, [5; предложение 2]), а затем ко всем двойным произведениям ζ применить стаффл-соотношение.

Если для вектора $\vec{s}=(s_1,s_2,\dots,s_l)$ обозначить *вес* $w(\vec{s})=s_1+s_2+\dots+s_l$, то равенства (11)–(13) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{s_1\geqslant 2,\,w(\vec{s})=m}\zeta(\vec{s})=(m-1)\zeta(m),\qquad m\geqslant 2, \tag{14}$$

$$\sum_{s_1\geqslant 3,\,w(\vec{s})=m}\zeta(\vec{s})=\zeta(m)+\zeta(2,m-2)-(m-2)\zeta(m-1,1),\qquad m\geqslant 3, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\sum_{s_1\geqslant 4,\,w(\vec{s})=m}\zeta(\vec{s})&=\zeta(m)+\zeta(3,m-3)+(m-3)\zeta(m-2,1,1)\\
&\quad-\zeta(m-1,1)-\zeta(2,m-3,1),\qquad m\geqslant 4.\end{aligned} \tag{16}$$

Равенство (14) можно также получить сложением формул для полной суммы кратных дзета-значений веса m и длины l (см. [6])

$$\sum_{s_1\geqslant 2,\, s_1+\dots+s_l=m} \zeta(s_1,s_2,\dots,s_l)=\zeta(m)$$

для $l=1,2,\dots,m-1$. К правой части (15) также можно применить известный результат. Из соотношений Оно (см. [7; теорема 1]) следует, что

$$\sum_{s_1\geqslant 3,\, s_1+\dots+s_l=m} \zeta(\vec{s})=\sum_{j=l+1}^{m-1}\zeta(j,m-j).$$

Складывая эти равенства для $l=1,2,\dots,m-2$, получаем

$$\sum_{s_1\geqslant 3, w(\vec{s})=m} \zeta(\vec{s})=\sum_{j=2}^{m-1}(j-1)\zeta(j,m-j).$$

Сравнивая с левой частью (15), находим

$$\sum_{j=2}^{m-1}(j-1)\zeta(j,m-j)=\zeta(m)+\zeta(2,m-2)-(m-2)\zeta(m-1,1).$$

Это равенство несложно доказывается непосредственно через ряды.

Равенства (11)–(13) имеют следующее обобщение.

Теорема 4. *Для $l\geqslant 2$, $n\geqslant 1$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\widetilde{\zeta}(l,\{1\}_{n-1})&=\sum_{j=0}^{l-3}(-1)^j\zeta(l-j-1,n,\{1\}_j)\\&\qquad+\sum_{j=0}^{l-3}(-1)^j\zeta(n+l-j-1,\{1\}_j)+(-1)^l n\zeta(n+1,\{1\}_{l-2}).\end{aligned}$$

В случае $l=2$ суммы $\sum_{j=0}^{l-3}$ полагаются нулевыми.

Доказательство. Пусть $s>1$, $t>1$ – некоторые действительные числа. Определим следующие производящие функции:

$$F_\sigma(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\zeta_\sigma(\{s\}_k)x^k, \qquad G(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\zeta}(\{s\}_{k-1},t)x^k,$$

$$E_\sigma(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\zeta_\sigma(t,\{s\}_{k-1})-\zeta_\sigma(\{s\}_k))x^k,$$

$$H_\sigma(x)=F_\sigma(x)G(x)+E_\sigma(x). \tag{17}$$

Тогда

$$H_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\widetilde{\zeta}(\{s\}_{k-j-1},t)\zeta(\{s\}_j)+(-1)^k\zeta(t,\{s\}_{k-1})\biggr)x^k.$$

По теореме 3 из [1] выражение в больших скобках равно нулю и, следовательно, $H_0(x) = 1$. Откуда

$$F_0(x)G(x) = 1 - E_0(x). \tag{18}$$

Далее, по теореме 2 из [1]

$$F_\sigma(x) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{(j+\sigma)^s}\right)^{-1}$$

и

$$\frac{d}{d\sigma}[F_\sigma(x)]_{\sigma=0} = F_0(x)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-x/j^s}\frac{sx}{j^{s+1}} = F_0(x)\sum_{k=1}^{\infty}s\zeta(ks+1)x^k.$$

Продифференцируем по σ равенство (17), подставим $\sigma = 0$ и воспользуемся (18):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma}[H_\sigma(x)]_{\sigma=0} &= \frac{d}{d\sigma}[F_\sigma(x)]_{\sigma=0}G(x) + \frac{d}{d\sigma}[E_\sigma(x)]_{\sigma=0}\\ &= F_0(x)G(x)\sum_{k=1}^{\infty}s\zeta(ks+1)x^k + \frac{d}{d\sigma}[E_\sigma(x)]_{\sigma=0}\\ &= (1-E_0(x))\sum_{k=1}^{\infty}s\zeta(ks+1)x^k + \frac{d}{d\sigma}[E_\sigma(x)]_{\sigma=0}.\end{aligned}$$

Подставляя определения рядов $H_\sigma(x)$ и $E_\sigma(x)$ и сравнивая коэффициенты при x^k с $k \geqslant 1$, получим равенство

$$\begin{aligned}&s\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\widetilde{\zeta}(\{s\}_{k-j-1},t)\sum_{i=1}^{j}\zeta(\{s\}_{i-1},s+1,\{s\}_{j-i})\\ &\qquad + (-1)^{k-1}\biggl(t\zeta(t+1,\{s\}_{k-1}) + s\sum_{i=1}^{k-1}\zeta(t,\{s\}_{i-1},s+1,\{s\}_{k-i-1})\biggr)\\ &= s\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{j+1}(\zeta(\{s\}_{j+1}) - \zeta(t,\{s\}_j))\zeta((k-j-1)s+1) + s\zeta(ks+1)\\ &\qquad + (-1)^{k-1}\biggl(t\zeta(t+1,\{s\}_{k-1}) + s\sum_{i=1}^{k-1}\zeta(t,\{s\}_{i-1},s+1,\{s\}_{k-i-1})\\ &\qquad\qquad - s\sum_{i=1}^{k}\zeta(\{s\}_{i-1},s+1,\{s\}_{k-i})\biggr).\end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что по теореме 3 предел $\lim_{s\to1+0}\lim_{t\to n+0}$ левой части (19) равен $\widetilde{\zeta}(k+1,\{1\}_{n-1})$. Прежде чем найти тот же предел правой части (19), представим ее в виде $S_1 + S_2$, где

$$\begin{aligned}S_1 = s&\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(t,\{s\}_j)\zeta((k-j-1)s+1)\\ &+ (-1)^{k-1}\biggl(t\zeta(t+1,\{s\}_{k-1}) + s\sum_{i=1}^{k-1}\zeta(t,\{s\}_{i-1},s+1,\{s\}_{k-i-1})\biggr),\end{aligned}$$

$$S_2 = s\biggl(\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{j+1}\zeta(\{s\}_{j+1})\zeta((k-j-1)s+1) + \zeta(ks+1) + (-1)^k\sum_{i=1}^{k}\zeta(\{s\}_{i-1}, s+1, \{s\}_{k-i})\biggr),$$

и проделаем некоторые преобразования. Из стаффл-произведения следует, что

$$\zeta(t,\{s\}_j)\zeta((k-j-1)s+1) = \zeta((k-j-1)s+1, t, \{s\}_j) + \zeta(t+(k-j-1)s+1, \{s\}_j) + \sum_{i=1}^{j+1}\zeta(t,\{s\}_{i-1},(k-j-1)s+1,\{s\}_{j-i+1}) + \sum_{i=1}^{j}\zeta(t,\{s\}_{i-1},(k-j)s+1,\{s\}_{j-i}).$$

Суммируя эти равенства по j от 0 до $k-2$ со знаком $(-1)^j$, получим

$$S_1 = \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta((k-j-1)s+1, t, \{s\}_j) + \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(t+(k-j-1)s+1,\{s\}_j) + (-1)^{k-1}t\zeta(t+1,\{s\}_{k-1}). \tag{20}$$

Аналогично показывается, что

$$S_2 = 0. \tag{21}$$

Переходя к пределу $\lim_{s\to 1+0}\lim_{t\to n+0}$ в равенстве (19) и используя (20) и (21), получаем утверждение теоремы (для $l = k+1$).

Следствие 5. *Для $m \geqslant k \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\sum_{s_1\geqslant k,\, w(\vec{s})=m}\zeta(\vec{s}) = \sum_{j=0}^{k-3}(-1)^j\zeta(k-j-1, m-k+1, \{1\}_j) + \sum_{j=0}^{k-3}(-1)^j\zeta(m-j,\{1\}_j) + (-1)^k(m-k+1)\zeta(m-k+2,\{1\}_{k-2}).$$

Это следствие обобщает равенства (14)–(16).

Результат теоремы 4 не является полностью новым. Так, в [8] была определена функция

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})\,dt,$$

где $\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^k$. В [7; теорема 2] было доказано, что для натуральных k и n справедливо выражение

$$\xi_k(n) = \widetilde{\zeta}(k+1,\{1\}_{n-1}).$$

Таким образом, из доказанного в [8; теорема 6] равенства

$$\xi_k(s)=\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(s,\{1\}_j)\zeta(k-j)+(-1)^{k-1}\\ \times\biggl(s\zeta(s+1,\{1\}_{k-1})+\sum_{i=1}^{k-1}\zeta(s,\{1\}_{i-1},2,\{1\}_{k-i-1})\biggr)$$

выводится утверждение теоремы 4 точно так же, как мы вывели его, используя (19).

Отметим также, что в [9; следствие 1] было доказано равенство

$$\sum_{j=0}^{m-2}\widetilde{\zeta}(m-j,\{1\}_j)=\sum_{j=1}^{m-1}\xi_{m-j}(j)=2(m-1)(1-2^{1-m})\zeta(m).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. А. Злобин, “Производящие функции для значений кратной дзета-функции”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 2005, № 2, 55–59.

[2] Д. В. Васильев, “Некоторые формулы для дзета-функции Римана в целых точках”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1996, № 1, 81–84.

[3] С. А. Злобин, “О некоторых интегральных тождествах”, *УМН*, **57**:3 (2002), 153–154.

[4] M. E. Hoffman, “The algebra of multiple harmonic series”, *J. Algebra*, **194**:2 (1997), 477–495.

[5] Е. А. Уланский, “Тождества для обобщенных полилогарифмов”, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 613–624.

[6] A. Granville, “A decomposition of Riemann's zeta-function”, *Analytic Number Theory* (Kyoto, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **247**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 95–101.

[7] Y. Ohno, “A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values”, *J. Number Theory*, **74**:1 (1999), 39–43.

[8] T. Arakawa, M. Kaneko, “Multiple zeta-values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions”, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 1–21.

[9] T. Aoki, Y. Ohno, “Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **41**:2 (2005), 329–337; `arXiv: math/0307264v1`.

С. А. Злобин
ООО “Аби Продакшн”
E-mail: `sirg_zlobin@mail.ru`

Поступило
17.07.2007