inepoint

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВАХ

С. А. Злобин

В работе [1] установлено интегральное тождество, связывающее два различных метода построения диофантовых приближений к значениям дзета-функции Римана в целых точках. В данной статье доказывается более общий результат.

Пусть даны натуральные числа $1 \leqslant r_1 < r_2 < \dots < r_l = m$, $r_0 = 0$. Определим многочлены $Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $1 \leqslant j \leqslant l$:

$$Q_0 = 1, \qquad Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) = Q_{j-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m) - z(1 - x_{r_j}) \prod_{1 \leqslant i < r_j} x_i.$$

Таким образом, $Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) = 1 - zx_1x_2 \cdots x_{r_1-1} + zx_1x_2 \cdots x_{r_1} - \dots - zx_1x_2 \cdots x_{r_j-1} + zx_1x_2 \cdots x_{r_j}$, и, очевидно, $Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$ при $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. Пусть даны комплексные числа a_0 и a_i, b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Введем обозначения:

$$S = \{r_j \mid 1 \leqslant j \leqslant l\}, \qquad c_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \notin S, \\ a_{r_{j-1}}, & \text{если } i = r_j \in S. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть* $\operatorname{Re}(a_0) > 0$, $\operatorname{Re}(b_i) > \operatorname{Re}(a_i) > 0$ *при* $1 \leqslant i \leqslant m$, $\operatorname{Re}(b_i) > \operatorname{Re}(c_i)$ *при* $i \in S$. *Тогда при* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ *выполняется равенство*

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_l(z, x_1, x_2, \dots, x_m)^{a_0}}\, d\overline{x} \\ &\qquad = \frac{\Gamma(a_m)}{\Gamma(a_0)} \prod_{i \in S} \frac{\Gamma(b_i - a_i)}{\Gamma(b_i - c_i)} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{c_i-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i \in S}(1 - zx_1 \dots x_i)^{b_i-a_i}}\, d\overline{x}, \end{aligned}$$

где $d\overline{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_m$ *и оба интеграла сходятся.*

Доказательство. Сходимость интегралов очевидна.

Доказательство проведем индукцией по l. Для удобства будем считать, что интеграл по нульмерному пространству равен единице; при $l = 0$ имеем $1 = \dfrac{\Gamma(a_0)}{\Gamma(a_0)}$, и база индукции проверена.

Проведем шаг индукции, где буква n для краткости обозначает r_{l-1}. Сделаем в первом интеграле замену $x_m \to 1 - x_m$ и представим его в виде:

$$\begin{aligned} I = &\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)^{a_0}} \\ &\times \int_{[0,1]^{m-n}} \frac{\prod_{n<i<m} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_m^{b_m-a_m-1}(1-x_m)^{a_m-1}}{(1 - zx_1 \cdots x_m / Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m))^{a_0}}\, d\overline{x}. \end{aligned} \tag{1}$$

При $|z| < 1$ имеем:

$$\left| \frac{zx_1 \cdots x_m}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)} \right| \leqslant |z| \cdot \frac{x_1 \cdots x_m}{Q_{l-1}(1, x_1, x_2, \dots, x_m)} \leqslant |z| < 1,$$

следовательно, справедливо представление:

$$\left(1 - \frac{zx_1 \cdots x_m}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)}\right)^{-a_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_0 + k)}{\Gamma(a_0) k!} \left(\frac{zx_1 \cdots x_m}{Q_{l-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m)} \right)^k.$$

Подставив этот ряд в (1), получим представление внутреннего интеграла в виде суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!}\prod_{n<i<m}\frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}\cdot\frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)} \times\biggl(\frac{zx_1\cdots x_n}{Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_m)}\biggr)^k.$$

Переставив суммирование и интегрирование (равномерная сходимость имеется), представим (1) в виде

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!}\prod_{n<i<m}\frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}\cdot\frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)} \times\int_{[0,1]^n}\frac{\prod_{i=1}^n x_i^{(a_i+k)-1}(1-x_i)^{(b_i+k)-(a_i+k)-1}}{Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_m)^{a_0+k}}\,d\overline{x}. \tag{2}$$

Согласно индукционному предположению, последний интеграл равен

$$\frac{\Gamma(a_n+k)}{\Gamma(a_0+k)}\prod_{i\in S'}\frac{\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i-c_i)}\int_{[0,1]^n}\frac{\prod_{i=1}^n x_i^{c_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i\in S'}(1-zx_1\cdots x_i)^{b_i-a_i}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n,$$

где $S'=S\setminus\{m\}$.

Воспользуемся этим представлением и поменяем в (2) суммирование и интегрирование:

$$I=\prod_{i\in S'}\frac{\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i-c_i)}\int_{[0,1]^n}\frac{\prod_{i=1}^n x_i^{c_i-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i\in S'}(1-zx_1\cdots x_i)^{b_i-a_i}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_n+k)}{\Gamma(a_0)k!} \times\prod_{n<i<m}\frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}\cdot\frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)}(zx_1x_2\cdots x_n)^k\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n.$$

Для завершения доказательства заметим, что внутренняя сумма может быть представлена в виде

$$\frac{\Gamma(c_m)}{\Gamma(a_0)}\prod_{n<i\leqslant m}\frac{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i)}\cdot{}_{m-n+1}F_{m-n}\biggl[\begin{matrix}b_m-a_m,c_{n+1},\dots,c_{m-1},c_m\\ b_{n+1},\dots,b_{m-1},b_m\end{matrix};zx_1x_2\cdots x_n\biggr] =\frac{\Gamma(a_m)}{\Gamma(a_0)}\,\frac{\Gamma(b_m-a_m)}{\Gamma(b_m-c_m)}\int_{[0,1]^{m-n}}\frac{\prod_{n<i\leqslant m}x_i^{c_i-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{(1-zx_1\cdots x_m)^{b_m-a_m}}\,dx_{n+1}\cdots dx_m.$$

Теорема доказана.

Результаты работы [1] получаются из теоремы при $r_j=2j$, $1\leqslant j\leqslant l$; $r_{l+1}=2l+1$.

В заключение отметим, что случай, когда знаменатель подынтегрального выражения есть степень $Q=1-zx_1x_2\cdots x_{r_1}+zx_1x_2\cdots x_{r_2}-\dots+(-1)^l zx_1x_2\cdots x_{r_l}$, сводится к теореме. При четном l многочлен Q может быть представлен в требуемом в теореме виде, а при нечетном l необходимо вначале сделать замену $x_{r_l}\to 1-x_{r_l}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] С. А. Злобин // Матем. заметки. 2002. Т. 71. №5. С. 782–787.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией 25.03.2002