УДК 511.36

Разложения кратных интегралов в линейные формы.

С.А. Злобин

При исследованиях иррациональности значений дзета-функции Римана возникают многомерные интегралы, представимые в виде линейных форм от этих значений с рациональными коэффициентами. Первые такие интегралы

$$\int_{[0,1]^2} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx\,dy \text{ и}$$

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-z(1-xy))^{n+1}} dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

предложенные Ф. Бейкерсом [1] в 1979 г. после доказательства Апери иррациональности $\zeta(3)$, могут быть представлены в виде линейных форм от 1, $\zeta(2)$ и 1, $\zeta(3)$ соответственно.

Попытки обобщения этих интегралов предпринимались в работах [2], [3], [4]. В частности, В.В. Зудилин в [4] доказал, что при некоторых условиях на параметры, интеграл $V(1)$, где

$$V(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1(1-x_2(\cdots - x_{m-1}(1-x_m)\cdots)^{a_0}} d\overline{x},$$

равен значению некоторой гипергеометрической функции в точке $z = 1$, а потому представим в виде линейной формы от 1 и значений дзета-функции Римана $\zeta(k)$ в точках k той же четности, что и m.

Другое обобщение интегралов (1) было предложено В.Н. Сорокиным ([5], [6]). Его интегралы можно представить в виде

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2\ldots x_{r_j})^{c_j}} d\overline{x},$$

где $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_l = m$. Оказывается, интеграл $V(z)$ при некоторых ограничениях на параметры может быть сведен к $S(z)$. Это было независимо показано автором ([7]) и С. Фишлером (для $z = 1$, [8]). Более общее тождество было доказано в [9].

Для дальнейшего изложения нам потребуются обобщенные полилогарифмы, определяемые равенствами

$$\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n_1 > n_2 > \ldots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \ldots n_l^{s_l}},$$

$$\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \ldots n_l^{s_l}},$$

где $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_l)$ – вектор с натуральными компонентами. Ряды, определяющие обобщенные полилогарифмы, сходятся при $|z| < 1$, а при $s_1 > 1$ и при $|z| = 1$. Для удобства положим $\mathrm{Li}_{\emptyset}(z) = \mathrm{Le}_{\emptyset}(z) = 1$. Будем писать, что $\vec{u} \leq \vec{v}$, если вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имеют одинаковое число компонент и $u_i \leq v_i$ при любом допустимом i. Назовем вектор $\vec{u}$ *подчиненным* вектору $\vec{v}$, если $\vec{u} \leq \vec{v}$ или $\vec{u} \leq \vec{v'}$ для некоторого вектора $\vec{v'}$, полученного из вектора $\vec{v}$ вычеркиванием нескольких компонент.

Интеграл $S(z)$ в случае целых параметров $b_i > a_i \geq 1$, и $c_j \geq 1$ (это предполагается также и всюду ниже), $c_1 + \ldots + c_j \leq \sum_{i=1}^{r_j} (b_i - a_i)$ и $|z| < 1$ представляется в виде $\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \,\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ (см. [7], Теорема 3). Здесь и далее коэффициенты при полилогарифмах в разложении интегралов – многочлены с рациональными коэффициентами. В некоторых случаях в линейной форме в действительности возникает много меньше обобщенных полилогарифмов, чем гарантируется этой теоремой, что важно в арифметических приложениях. Основная задача данной работы дать достаточные условия на параметры интеграла $S(z)$, при которых можно значительно сузить количество полилогарифмов, входящих в его разложение.

С помощью разложения $S(z)$ в кратный ряд и различных преобразований над кратными суммами, мы доказываем следующий результат.

Теорема 1 *Пусть выполнены неравенства* $c_1 + \ldots + c_j \leq \sum_{i=1}^{r_j}(b_i - a_i)$ *при всех* j *и* $a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geq 0$ *при* $j = 1, \ldots, l-1$, $i_1 \in [r_{j-1}+1, r_j]$, $i_2 \in [r_j + 1, r_{j+1}]$. *Тогда для* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ *верно равенство*

$$\int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1 - zx_1x_2\ldots x_{r_j})^{c_j}} d\overline{x} = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z),$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, *подчиненным* $(r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_l - r_{l-1})$ *(в том числе в сумму входит и пустой вектор* $\vec{s}$*). Дополнительно, если* $c_{j-1} + c_j \leq \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}(b_i - a_i)$ *при* $j = 2, \ldots, l$, *то в этих векторах* $\vec{s}$ *выполняется* $s_j > 1$ *при* $j > 1$.

Полагая в теореме $r_j = j$ при $j = 1, \ldots, l$, получим

Следствие 1 *При* $a_{i+1} + c_i - b_i \geq 0$ *для* $i = 1, \ldots, l-1$ *и* $\sum_{i=1}^{j}(b_i - a_i - c_i) \geq 0$ *для любого* $j = 1, \ldots, l$ *выполняется разложение*

$$\int_{[0,1]^l} \frac{\prod_{i=1}^l x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1 - zx_1x_2\ldots x_j)^{c_j}} d\overline{x} = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{1\}_k}(z)$$

(через $\{a\}_k$ *мы обозначаем* k *раз повторенное через запятую число* a*).*

Полагая в теореме $r_j = 2j$ при $j = 1, \ldots, l$, получим

Следствие 2 *Пусть*

$$(b_{2j-1} - a_{2j-1}) + (b_{2j} - a_{2j}) \geq c_{j-1} + c_j, j = 1, \dots, l, c_0 = 0,$$

$$a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geq 0, i_1 \in [2j-1, 2j], i_2 \in [2j+1, 2j+2], j = 1, \dots, l-1$$

Тогда выполняется разложение

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\dots x_{2j})^{c_j}} d\overline{x}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z).$$

Дополнительно, если $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) > c_1$, *то* $T_k(1) = 0$ *для любого* $k = 1, \dots, l-1$.

Полагая в теореме $r_j = 2j - 1$ при $j = 1, \dots, l+1$, получим

Следствие 3 *Пусть*

$$b_1 - a_1 \geq c_1, \quad (b_{2j-2} - a_{2j-2}) + (b_{2j-1} - a_{2j-1}) \geq c_{j-1} + c_j, j = 2, \dots, l,$$

$$a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geq 0, i_1 \in [\max(1, 2j-2), 2j-1], i_2 \in [2j, 2j+1], j = 1, \dots, l-1.$$

Тогда выполняется разложение

$$\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l+1}(1 - zx_1x_2\dots x_{2j-1})^{c_j}} d\overline{x}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l} T_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z).$$

Используя следствия 2 и 3, а также теорему из [9], можно получить представления для интегралов $V(z)$.

Теорема 2 *Пусть параметры A_0, A_i, B_i, $i=1,\dots,2l$ – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$B_i > A_i > 0 \text{ при всех } i, B_i > A_{i-2} \text{ при четных } i,$$

$$A_3 \geq A_2, A_5 \geq A_4, \dots, A_{2l-1} \geq A_{2l-2},$$

$$B_2 \geq B_1, B_4 \geq B_3, \dots, B_{2l-2} \geq B_{2l-3},$$

$$A_2+B_1 \geq A_0+A_1, A_4+B_3 \geq A_3+B_2, \dots, A_{2l}+B_{2l-1} \geq A_{2l-1}+B_{2l-2}.$$

Тогда

$$V_{2l}(z) = \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1-zx_1+zx_1x_2-zx_1x_2x_3+\ldots+zx_1x_2\cdots x_{2l})^{A_0}} d\overline{x}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z).$$

Дополнительно, если $A_2+B_1 > A_0+A_1$, то $T_k(1)=0$ для любого $k=1,\dots,l-1$.

Теорема 3 *Пусть параметры A_0, A_i, B_i, $i=1,\dots,2l+1$ – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$B_i > A_i > 0 \text{ при всех } i, B_1 > A_0, B_i > A_{i-2} \text{ при } i \geq 2, B_{2l+1} > A_{2l},$$

$$A_1 \geq A_0, A_2 \geq A_1, A_4 \geq A_3, \dots, A_{2l} \geq A_{2l-1},$$

$$B_3 \geq B_2, B_5 \geq B_4, \dots, B_{2l-1} \geq B_{2l-2}, \sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1}-A_{2j-1}) \geq A_0,$$

$$A_3+B_2 \geq A_2+B_1, A_5+B_4 \geq A_4+B_3, \dots, A_{2l+1}+B_{2l} \geq A_{2l}+B_{2l-1}.$$

Тогда

$$V_{2l+1}(z) = \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1-zx_1+zx_1x_2-zx_1x_2x_3+\ldots-zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}} d\overline{x}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{2\}_k,1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k,1}(z) + U(z^{-1}).$$

Дополнительно, если $\sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1} - A_{2j-1}) > A_0$, *то* $T_k(1) = 0$ *для любого* $k = 1, \ldots, l-1$.

Из равенств $\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(1) = 2(1 - 2^{1-2k})\zeta(2k)$ и $\operatorname{Le}_{\{2\}_k,1}(1) = 2\zeta(2k+1)$ (см. [10] и [7]) следует, что в условиях теорем 2 и 3, интегралы $V_{2l}(1)$ и $V_{2l+1}(1)$ могут быть представлены в виде линейной формы с рациональными коэффициентами от 1 и чисел $\zeta(k)$, где k той же четности, что и размерность интеграла. С помощью теоремы 3 и теоремы 2 из [7] показывается разложение интеграла из [5].

Можно доказать аналогичные теоремы и следствия для обобщенных полилогарифмов со строгими неравенствами $\operatorname{Li}_{\vec{s}}(z)$.

Теорема 4 *Пусть выполнены неравенства* $c_1 + \ldots + c_j \le \sum_{i=1}^{r_j}(b_i - a_i)$ *при всех* j *и* $a_{i_1} \ge b_{i_2}$ *при* $j = 1, \ldots, l-1$, $i_1 \in [r_{j-1}+1, r_j]$, $i_2 \in [r_j + 1, r_{j+1}]$. *Тогда для* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ *верно равенство* $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\vec{s}}(z)$, *где суммирование ведется по векторам* $\vec{s}$, *подчиненным* $(r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_l - r_{l-1})$ *(в том числе в сумму входит и пустой вектор* $\vec{s}$*). Дополнительно, если* $c_{j-1} + c_j \le \sum_{r_{j-1}+1}^{r_j}(b_i - a_i)$ *при* $j = 2, \ldots, l$, *то в этих векторах* $\vec{s}$ *выполняется* $s_j > 1$ *при* $j > 1$.

Полагая в теореме $r_j = j$ при $j = 1, \ldots, l$, получим

Следствие 4 *При* $b_1 > a_1 \ge b_2 > a_2 \ge \ldots \ge b_l > a_l$ *и* $\sum_{i=1}^{j}(b_i - a_i - c_i) \ge 0$ *для любого* $j = 1, \ldots, l$ *выполняется разложение*

$$\int_{[0,1]^l} \frac{\prod_{i=1}^{l} x_i^{a_i - 1}(1 - x_i)^{b_i - a_i - 1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - z x_1 x_2 \ldots x_j)^{c_j}} d\overline{x} = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_k}(z).$$

Полагая в теореме $r_j = 2j$ при $j = 1, \dots, l$, получим

Следствие 5

$(b_{2j-1} - a_{2j-1}) + (b_{2j} - a_{2j}) \geq c_{j-1} + c_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad c_0 = 0,$

$a_{i_1} \geq b_{i_2}, \quad i_1 \in [2j-1, 2j], i_2 \in [2j+1, 2j+2], j = 1, \dots, l-1$

Тогда выполняется разложение

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{2j})^{c_j}} d\overline{x}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{1,\{2\}_k}(z).$$

В частном случае эта аналитическая конструкция использовалась в [6].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 03-01-00359.

Список литературы

1. Beukers F. // A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull. London Math Society 1979, 11, N3, pp 268-272. **2**. Василенко О.Н. // Некоторые формулы для значения дзета-функции Римана в целых точках, Тезисы докладов Республиканской научно-теоритической конференции "Теория чисел и ее приложения", Ташкент, 26-28 сентября, 1990г., Ташкентский гос. пед. институт, 1990, стр. 27. **3**. Vasilyev D.V. // On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd integers, preprint N1 (558), Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001. **4**. Зудилин В.В. // Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы, Успехи матем. наук 57:4 (2002), с. 177–178. **5**. Сорокин В.Н. // Теорема Апери, Вестник МГУ, Сер. I, no. 3 (1998), 48–52. **6**. Сорокин В.Н. // О мере трансцендентности числа π^2, Матем. сборник. 1996. V.187. No.12., С.87. **7**. Злобин С.А. // Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов, Мат. Заметки 2002, Т. 71. N5. С.782-787. **8**. Fishler S. // Formes linéaires en polyzêtas et intégrales multiples, C. R. Acad. Sci. Paris, Série. I Math. 335 (2002), 1-4. **9**. Злобин С.А. // О некоторых интегральных тождествах, Успехи Мат. Наук, Т. 57, вып. 3, с. 153-154. **10**. Васильев Д.В. // Некоторые формулы для дзета-функции Римана в целых точках, Вестник Моск. Ун-та, Сер. 1, Мат., Мех., 1996, с. 81-84.