Математические заметки

том 77 выпуск 5 май 2005

УДК 511+517.5

РАЗЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

С. А. Злобин

Доказываются общие теоремы о разложении кратных интегралов в линейные формы от обобщенных полилогарифмов с коэффициентами – рациональными функциями.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. При исследованиях иррациональности значений дзета-функции Римана возникают многомерные интегралы, представимые в виде линейных форм с рациональными коэффициентами от этих значений. Первые такие интегралы были предложены Ф. Бейкерсом [1] в 1979 г. после доказательства Р. Апери иррациональности $\zeta(3)$. Его интегралы

$$\int_{[0,1]^2} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,dx\,dy$$

и

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-z(1-xy))^{n+1}}\,dx\,dy\,dz$$

могут быть представлены в виде линейных форм от $1,\zeta(2)$ и $1,\zeta(3)$ соответственно.

Существуют различные попытки обобщения этих интегралов. Первая из них была в 1990 г. предпринята О. Н. Василенко [2], который рассмотрел интегралы

$$V_{m,n} = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^n(1-x_i)^n}{\bigl(1-x_1(1-x_2(\cdots - x_{m-1}(1-x_m)\cdots\bigr)^{n+1}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m \qquad (1)$$

и установил некоторые свойства $V_{m,0}$. Интегралы $V_{2,n}$ и $V_{3,n}$ (после замены $x_m \mapsto 1-x_m$) совпадают с интегралами Бейкерса. Изучение интегралов этого вида продолжил Д. В. Васильев [3], доказав, что при $m=4$ и $m=5$ интеграл (1) представляется в виде линейных форм с рациональными коэффициентами от $1,\zeta(2),\zeta(4)$ и $1,\zeta(3),\zeta(5)$ соответственно. Естественным обобщением (1) является интеграл

$$V(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\bigl(1-zx_1(1-x_2(\cdots - x_{m-1}(1-x_m)\cdots\bigr)^{a_0}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

В. В. Зудилин в [4] доказал, что при некоторых условиях на параметры интеграл $V(1)$ равен значению гипергеометрической функции в точке $z=1$, что доказывало его представление в виде линейной формы от 1 и чисел $\zeta(k)$ для $1<k\leqslant m$ той же четности, что и m.

Другая попытка обобщения интегралов Бейкерса была предпринята В. Н. Сорокиным [5], [6], который по существу доказал тождества

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \\ = P_{2,1}(z^{-1})\operatorname{Le}_{2,1}(z)+P_{1,1}(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,1}(z)+P_1(z^{-1})\operatorname{Le}_1(z)+P_\varnothing(z^{-1}) \tag{2}$$

и

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{2j})^{n+1}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l} \\ = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1})\operatorname{Li}_{\{2\}_k}(z)+\sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1})\operatorname{Li}_{1,\{2\}_k}(z), \tag{3}$$

где $a_{2j-1}=a_{2j}=(l+1-j)(n+1)-s$, $0\leqslant s\leqslant n$. Через $\{a\}_k$ мы обозначаем k раз повторенное через запятую число a. В этих формулировках присутствуют обобщенные полилогарифмы, определяемые равенствами

$$\operatorname{Li}_{\vec{s}}(z)=\sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1}\frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}}, \qquad \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)=\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\dots\geqslant n_l\geqslant 1}\frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}},$$

где $\vec{s}=(s_1,s_2,\dots,s_l)$ – вектор с натуральными компонентами. Ряды, определяющие обобщенные полилогарифмы, сходятся при $|z|<1$. Они могут быть выражены друг через друга. Для удобства положим $\operatorname{Li}_\varnothing(z)=\operatorname{Le}_\varnothing(z)=1$. Здесь и далее коэффициенты при полилогарифмах в разложении интегралов – многочлены с рациональными коэффициентами. Существование такого разложения было показано с помощью аппроксимаций Паде. В дальнейшем будут использоваться *длина* $\ell(\vec{s})$ вектора $\vec{s}$ – количество его координат и *вес* $w(\vec{s})$ – сумма его компонент. Будем писать $\vec{u}\leqslant\vec{v}$, если длины векторов $\vec{u},\vec{v}$ равны и $u_i\leqslant v_i$ при любом допустимом i. Назовем вектор $\vec{u}$ *подчиненным* вектору $\vec{v}$, если $\vec{u}\leqslant\vec{v}$ или $\vec{u}\leqslant\vec{v}\,'$ для некоторого вектора $\vec{v}\,'$, полученного из вектора $\vec{v}$ вычеркиванием нескольких компонент.

Ниже мы рассмотрим интегралы вида (2), (3) в общем виде

$$S(z)=\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{r_j})^{c_j}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m, \\ 0=r_0<r_1<r_2<\dots<r_l=m. \tag{4}$$

Оказывается, интеграл $V(z)$ при некоторых ограничениях на параметры может быть сведен к $S(z)$. Это было независимо показано автором [7] и С. Фишлером [8] (для $z=1$). Более общее тождество было доказано в [9].

2. Общая теорема о разложении кратных интегралов.

Лемма 1. *Обобщенные полилогарифмы* $\mathrm{Le}_{s_1,s_2,\dots,s_n}(z)$ *с различными индексами линейно независимы над* $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство. Известно, что обобщенные полилогарифмы $\mathrm{Li}_{s_1,s_2,\dots,s_n}(z)$ (со строгими неравенствами) при различных индексах линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ (см. [10], [11]). Наборы функций $\{\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)\}$ и $\{\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)\}$ с весами вектора $\vec{s}$, не превосходящими некоторого фиксированного числа и упорядоченных по возрастанию длины $\vec{s}$, связаны преобразованием с верхнетреугольной матрицей с ненулевыми диагональными элементами (см. [11, п. 3]):

$$\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z) = \mathrm{Li}_{\vec{s}}(z) + \sum_{\vec{t}} \mathrm{Li}_{\vec{t}}(z),$$

где векторы $\vec{t}$ в сумме имеют тот же вес, что и $\vec{s}$, но меньшую длину. Отсюда и следует линейная независимость $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ над $\mathbb{C}(z)$.

Следствие 1. *Если функция* $f(z)$ *имеет представление в виде конечной суммы* $\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$, *где* $P_{\vec{s}}(x)$ – *многочлены, то это представление единственно.*

Рассмотрим теперь интеграл (4). При условиях $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\mathrm{Re}(c_j) > 0$, $1 \leqslant j \leqslant l$, и $|z| < 1$ он, очевидно, сходится.

Лемма 2. *Пусть* $b_i - a_i$ *и* c_j – *натуральные числа. Тогда выполняется равенство*

$$zS(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_l \geqslant 1} R(n_1, n_2, \dots, n_l) z^{n_1},$$

где

$$\begin{aligned} R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l) = {} & \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - a_i)}{\prod_{j=1}^l \Gamma(c_j)} \\ & \times \frac{\prod_{j=1}^l [(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 1)(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 2) \cdots (\zeta_j - \zeta_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod_{j=1}^l \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(\zeta_j + a_i - 1)(\zeta_j + a_i) \cdots (\zeta_j + b_i - 2)]} \end{aligned}$$

и подразумевается, что $r_0 = 0$, $\zeta_{l+1} \equiv 1$, *и в случае* $c_j = 1$ *множитель в числителе опускается.*

Доказательство. Разложим каждый множитель $(1 - zx_1x_2 \cdots x_{r_j})^{-c_j}$ под интегралом по формуле

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)k!} x^k.$$

Получим

$$\begin{aligned} S(z) = {} & \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m x_i^{a_i - 1}(1 - x_i)^{b_i - a_i - 1} \\ & \times \prod_{j=1}^l \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c_j + k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!} (zx_1x_2 \cdots x_{r_j})^{k_j} \, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m \end{aligned}$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_l=0}^{\infty} z^{k_1+k_2+\dots+k_l} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(c_j+k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!}$$
$$\times \int_{[0,1]^m} \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} x_i^{a_i+k_j+\dots+k_l-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1} dx_1\,dx_2\cdots dx_m$$
$$= \sum_{k_1,\dots,k_l=0}^{\infty} z^{k_1+k_2+\dots+k_l} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(c_j+k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!}$$
$$\times \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{\Gamma(a_i+k_j+\dots+k_l)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k_j+\dots+k_l)}.$$

Сделаем замену переменных $n_i = k_i + k_{i+1} + \dots + k_l + 1$; тогда $k_i = n_i - n_{i+1}$, $n_{l+1} = 1$. После перегруппировки множителей получим

$$S(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1-1} \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(b_i-a_i)}{\prod_{j=1}^{l} \Gamma(c_j)}$$
$$\times \frac{\prod_{j=1}^{l}[(n_j-n_{j+1}+1)(n_j-n_{j+1}+2)\cdots(n_j-n_{j+1}+c_j-1)]}{\prod_{j=1}^{l}\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}[(a_i+n_j-1)(a_i+n_j)\cdots(b_i+n_j-2)]},$$

что и доказывает лемму.

Частным случаем леммы 2 является

Лемма 3. *Справедливо следующее интегральное представление для обобщенных полилогарифмов*:

$$\mathrm{Le}_{s_1,s_2,\dots,s_n}(z) = z \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1\,dx_2\cdots dx_m}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})},$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \dots + s_j$, $m = r_l$.

Считаем далее параметры a_i, b_i, c_j целыми, причем $b_i > a_i \geqslant 1$, $c_j \geqslant 1$.

Определим *индекс* рациональной функции $R(x) = P(x)/Q(x)$ как $I(R) = \deg P - \deg Q$. Пусть $R(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_l) = R_1(\zeta_1)\cdots R_l(\zeta_l)$. Тогда сопоставим ей вектор из индексов $(I(R_1),\dots,I(R_l))$.

Теорема 1. *Пусть для функции* $R(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_l) = R_1(\zeta_1)\cdots R_l(\zeta_l)$ *выполняется неравенство* $I(R_1) + I(R_2) + \dots + I(R_j) + j \leqslant 0$ *при любом* $j = 1,\dots,l$, *и все полюсы* R_j *лежат в множестве* $\{0,-1,-2,\dots\}$. *Обозначим соответствующий максимальный из порядков этих полюсов через* m_j, *а минимальное и максимальное значения абсолютных величин полюсов всех функций* R_j – *через* p *и* P. *Тогда при* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, *сумма*

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_l \geqslant 1} R(n_1,n_2,\dots,n_l) z^{n_1-1} \tag{5}$$

представляется в виде

$$\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z), \tag{6}$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, удовлетворяющим условию $\vec{s} \leqslant (m_1 * m_2 * \dots * m_l)$, где '$*$' означает либо запятую, либо плюс при каком-либо их распределении знаков (в частности, будут выполняться неравенства $\ell(\vec{s}) \leqslant l$ и $w(\vec{s}) \leqslant m_1 + m_2 + \dots + m_l$), а $P_{\vec{s}}(x)$ – многочлены с рациональными коэффициентами такие, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\varnothing}(z) \geqslant 1, \quad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant p + 1 \ \textit{ при } \vec{s} \neq \varnothing, \qquad \deg P_{\vec{s}}(x) \leqslant P + 1.$$

Дополнительно, если выполняются неравенства

$$I(R_1) + I(R_2) + \dots + I(R_j) + j \leqslant -1, \qquad j = 1, \dots, l, \tag{7}$$

то $P_{\vec{s}}(1) = 0$ для векторов $\vec{s}$ с $s_1 = 1$.

Докажем вначале следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть теорема 1 верна для функций R, зависящих от менее, чем l переменных (в случае $l = 1$ никаких предположений не требуется). Тогда теорема верна для $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_l) = R_1(\zeta_1)R_2(\zeta_2)\cdots R_l(\zeta_l)$, где $R_j(x) = 1/(x + p_j)^{s_j}$, $j = 1, \dots, l$. Условие (7) в этом случае равносильно $s_1 \geqslant 2$.*

Доказательство. Требуется доказать теорему 1 для суммы

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1 - 1} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(n_j + p_j)^{s_j}}, \tag{8}$$

причем $\min_{1 \leqslant j \leqslant l} p_j = p$, $\max_{1 \leqslant j \leqslant l} p_j = P$. Пусть $r_0 = 0$, $r_j = s_1 + s_2 + \dots + s_j$, $m = r_l$. Тогда (8) можно записать в виде интеграла

$$I(p_1, p_2, \dots, p_l) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^{l} (x_{r_{j-1}+1} x_{r_{j-1}+2} \cdots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{j=1}^{l} (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})} \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_m.$$

Проведем индукцию по величине $p_1 + p_2 + \dots + p_j$. При этом покажем только, что сумма (8) представима в виде (6), так как в каждом из разбираемых случаев нетрудно проследить за степенями многочленов, а также за ограничением на векторы получающихся обобщенных полилогарифмов.

База индукции ($p_1 = p_2 = \dots = p_l = 0$) следует из леммы 3: $I(0, 0, \dots, 0) = z^{-1} \times \operatorname{Le}_{s_1, s_2, \dots, s_l}(z)$.

Рассмотрим случай $p_j > 0$ для любого $j = 1, \dots, l$. Из равенства

$$x_1 x_2 \cdots x_{r_l} = \frac{1 - (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_l})}{z}$$

следует, что

$$I(p_1,p_2,\dots,p_l)=z^{-1}I(p_1-1,p_2-1,\dots,p_l-1)\\ -z^{-1}\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\cdots x_{r_j})^{p_j-1}}{\prod_{j=1}^{l-1}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m.$$

В последнем интеграле проинтегрируем по переменным $x_{r_{l-1}+1},x_{r_{l-1}+2},\dots,x_{r_l}$; получим рациональное число. Полученный интеграл представляется в виде (6) по условию леммы (перед этим нужно разложить его в сумму по лемме 2), а $I(p_1-1,p_2-1,\dots,p_l-1)$ представляется в виде (6) по предположению индукции. Таким образом можно считать $p=\min_{1\leqslant j\leqslant l}p_j=0$.

Пусть теперь $p_h>0$ при некотором $h>1$. Запишем равенство

$$(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\cdots x_{r_h})^{p_h}=(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\cdots x_{r_h})^{p_h-1}\\ +(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\cdots x_{r_h})^{p_h}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_{h-1}})\\ -(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\cdots x_{r_h})^{p_h-1}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_h}),$$

из которого следует

$$I(p_1,p_2,\dots,p_h,\dots,p_l)=I(p_1,p_2,\dots,p_h-1,\dots,p_l)\\ +\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\cdots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\ne h-1}}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m\\ -\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\cdots x_{r_j})^{p'_j}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\ne h}}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m,$$

где $p'_j=p_j$ при $j\ne h$ и $p'_h=p_h-1$. Два интеграла в правой части с меньшим числом множителей в знаменателе по условию леммы представляются в виде (6), а к $I(p_1,p_2,\dots,p_h-1,\dots,p_l)$ применимо предположение индукции.

Остается доказать утверждение леммы для интеграла

$$I(p_1,0,\dots,0)=\int_{[0,1]^m}\frac{(x_1x_2\cdots x_{r_1})^{p_1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m.$$

Из равенства

$$(x_1x_2\cdots x_{r_1})^{p_1}=z^{-1}(x_1x_2\cdots x_{r_1})^{p_1-1}-z^{-1}(x_1x_2\cdots x_{r_1})^{p_1-1}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_1})$$

следует

$$I(p_1,0,\dots,0)=z^{-1}I(p_1-1,0,\dots,0)\\ -z^{-1}\int_{[0,1]^m}\frac{(x_1x_2\cdots x_{r_1})^{p_1-1}}{\prod_{j=2}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m.$$

Последний интеграл по условию леммы, а $I(p_1-1,0,\dots,0)$ по предположению индукции представляются в виде (6). Лемма доказана.

Назовем *δ-суммой* выражение

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1}R_1(n_1)\sum_{n_2=1}^{n_1+\delta_1} R_2(n_2)\cdots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}} R_l(n_l),$$

где δ_j – целые неотрицательные числа, полюсы R_j лежат на отрезке $[-P_j,-p_j]$ и являются целыми числами и для любого $j=1,\dots,l$ выполняется $I(R_1)+I(R_2)+\dots+I(R_l)+j\leqslant 0$.

Лемма 5. *Любая δ-сумма представляется в виде линейной комбинации δ-сумм, у которых $I(R_j)<0$ для любого j. При этом справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $\vec{T}$ – вектор из максимальных порядков полюсов функций R_j, а $\vec{t}$ – такой вектор для δ-суммы линейной комбинации, то $\vec{t}$ может быть получен из $\vec{T}$ вычеркиванием нескольких компонент.*

2) *Минимум из чисел p_j в каждой δ-сумме линейной комбинации не меньше такого минимума в исходной δ-сумме, а максимум из чисел P_j в каждой δ-сумме линейной комбинации не больше такого максимума в исходной δ-сумме.*

3) *Максимум из чисел $I(R_1)+I(R_2)+\dots+I(R_l)+j$ в каждой δ-сумме линейной комбинации не больше такого максимума в исходной δ-сумме. Следовательно, если у изначальной суммы он был <-1, то в каждой δ-сумме из линейной комбинации он будет <-1.*

4) *Если для любого j выполнялись неравенства $p_{j+1}+\delta_j\geqslant P_j$ в исходной δ-сумме, то они будут выполняться и в любой δ-сумме из линейной комбинации.*

5) *То же утверждение, что и в 4), но для неравенства $p_j>P_{j+1}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по вектору (l,k), где k – количество функций R_j с $I(R_j)\geqslant 0$, $0\leqslant k<l$. Векторы (l,k) мы упорядочим в соответствии с лексикографическим порядком, т.е. запись $(l_1,k_1)<(l_2,k_2)$ означает, что либо $l_1<l_2$, либо $l_1=l_2$ и $k_1<k_2$.

База индукции $l=1$ очевидна, так как в этом случае, по определению δ-суммы имеем $I(R_1)\leqslant -1$. Докажем утверждение для вектора (l,k) в предположении, что для меньших векторов оно доказано. Покажем при этом основное утверждение леммы. Нетрудно проследить за утверждениями 1)–5) в шаге индукции. Если $k=0$, то доказывать нечего, ведь тогда $I(R_j)<0$ для любого j. Пусть $k>0$, т.е. для некоторого j выполнено $I(R_j)\geqslant 0$. Так как по условию $I(R_1)\leqslant -1$, имеем $j>1$. Представим R_j в виде суммы многочлена и правильной дроби. В слагаемом с правильной дробью число k уменьшилось на 1, и к нему можно применить предположение индукции. Рассмотрим теперь второе слагаемое, в котором $R_j(x)=P(x)$, P – многочлен.

а) Пусть $j=l$. Просуммируем последнюю сумму:

$$\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}} P(n_l)=Q(n_{l-1}),$$

где Q – многочлен степени $\deg P+1$. Таким образом, R_{l-1} умножится на Q. Итак, по сравнению с исходной δ-суммой количество знаков суммирования уменьшилось на единицу. Нетрудно видеть, что полученное выражение является δ-суммой (вектор из индексов входящих в нее рациональных функций равен $(I(R_1),\dots,I(R_{l-2}),I(R_{l-1})+I(R_l)+1))$, и значит, мы можем применить предположение индукции.

б) Пусть теперь $R_j(x)=P(x)$, $1<j<l$, где P – многочлен. Перепишем исходную δ-сумму в виде

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1}R_1(n_1)\sum_{n_2=1}^{n_1+\delta_1} R_2(n_2)\cdots\sum_{n_{j-1}=1}^{n_{j-2}+\delta_{j-2}} R_{j-1}(n_{j-1})\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}} P(n_j)\sum_{n_{j+1}=1}^{n_j+\delta_j} f(n_{j+1}),$$

где

$$f(n_{j+1})=R(n_{j+1})\sum_{n_{j+2}=1}^{n_{j+1}+\delta_{j+1}} R_{j+2}(n_{j+2})\cdots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}} R_l(n_l).$$

Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}} P(n_j)\sum_{n_{j+1}=1}^{n_j+\delta_j} f(n_{j+1})\\
&\quad=\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}} P(n_j)\sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1})-\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}} P(n_j)\sum_{n_{j+1}=n_j+\delta_j+1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1})\\
&\quad=Q_1(n_{j-1})\sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1})-\sum_{n_{j+1}=\delta_j+2}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1})\sum_{n_j=1}^{n_{j+1}-\delta_j-1} P(n_j)\\
&\quad=Q_1(n_{j-1})\sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} f(n_{j+1})-\sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j} Q_2(n_{j+1})f(n_{j+1})\\
&\qquad+\sum_{n_{j+1}=1}^{\delta_j+1} Q_2(n_{j+1})f(n_{j+1}),
\end{aligned}$$

причем $\deg Q_1=\deg Q_2=\deg P+1$, а третье слагаемое является константой. Таким образом, исходную δ-сумму мы представим в виде линейной комбинации трех δ-сумм меньшей кратности с соответствующими им векторами

$$\begin{gathered}
(I(R_1),\dots,I(R_{j-1})+I(R_j)+1,I(R_{j+1}),\dots,I(R_l)),\\
(I(R_1),\dots,I(R_{j-1}),I(R_{j+1})+I(R_j)+1,\dots,I(R_l)),\\
(I(R_1),\dots,I(R_{j-1})).
\end{gathered}$$

К каждой из них можно применить предположение индукции, что и доказывает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Проведем индукцию по l. Предположение индукции: теорема верна для функций R, зависящих от менее, чем l переменных (в случае $l=1$ никаких предположений не требуется). Докажем ее для функций R, зависящих от l переменных.

Применяя лемму 5 при $\delta_j = 0$, мы можем считать, что для любого j выполняется $I(R_j) < 0$. Разложим каждую функцию R_j в сумму простейших дробей и представим R в виде

$$R(\zeta_1,\ldots,\zeta_l) = \sum_{(m_1,\ldots,m_l)} \sum_{(u_1,\ldots,u_l)} \frac{B_{\vec{m},\vec{u}}}{(\zeta_1+u_1)^{m_1}\cdots(\zeta_l+u_l)^{m_l}},$$

в суммах $u_j \in U_j$, $m_j \leqslant M_j$, где U_j – множество абсолютных значений (неположительных) величин полюсов R_j, M_j – максимальный из порядков этих полюсов, $B_{\vec{m},\vec{u}} = \prod_{j=1}^{l} B_{m_j,u_j}$. Достаточно доказать теорему для фиксированных $m_2,\ldots,m_l$ и $u_2=p_2$, $\ldots$, $u_l=p_l$, т.е. для

$$R(\zeta_1,\ldots,\zeta_l) = \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{u_1\in U_1} \frac{B_{m_1,u_1}}{(\zeta_1+u_1)^{m_1}(\zeta_2+p_2)^{m_2}\ldots(\zeta_l+p_l)^{m_l}} \tag{9}$$

(далее для краткости будем писать u вместо u_1 и U всесто U_1).

Члены с $m_1 \geqslant 2$ в сумме (5) сразу же представляются в нужной форме по лемме 4. Если $I(R_1) = -1$, то дополнительное условие теоремы 1 не выполняется, и нам не надо заботиться о коэффициентах при полилогарифмах с первой координатой 1. В этом случае члены с $m_1 = 1$ также представим по лемме 4.

Рассмотрим далее случай $I(R_1) \leqslant -2$. В этом случае $\sum_{u\in U} B_{1,u} = 0$. Свернем сумму слагаемых из (5) с $m_1=1$ в интеграл вида

$$\int_{[0,1]^m} \frac{\bigl(\sum_{u\in U} B_{1,u}x_1^u\bigr)\prod_{j=2}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\cdots x_{r_j})^{p_j}}{(1-zx_1)\prod_{j=2}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m,$$
$$r_1=1,\quad m=r_l.$$

По лемме 4 интеграл представляется в виде

$$\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z). \tag{10}$$

Остается только доказать, что $P_{\vec{s}}(1) = 0$, если $s_1 = 1$. Так как $\sum_{u\in U} B_{1,u} = 0$, многочлен $\sum_{u\in U} B_{1,u}x_1^u$ делится на $1-x_1$. Итак,

$$\sum_{u\in U} B_{1,u}x_1^u = (1-x_1)B(x_1) = z^{-1}(1-zx_1)B(x_1) + (1-z^{-1})B(x_1);$$

соответственно наш интеграл распадется на два:

$$z^{-1}\int_{[0,1]^m} \frac{B(x_1)\prod_{j=2}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\cdots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{j=2}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m$$
$$+\,(1-z^{-1})\int_{[0,1]^m} \frac{B(x_1)\prod_{j=2}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\cdots x_{r_j})^{p_j}}{(1-zx_1)\prod_{j=2}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m.$$

Первый интеграл по предположению индукции представляется в нужной форме, и условие на коэффициенты там выполняется. Во втором интеграле после домножения на $1 - z^{-1}$ все многочлены будут иметь корнем число 1. Итак, в представлении их суммы в виде линейной формы выполняется свойство $P_{\vec{s}}(1) = 0$, если $s_1 = 1$. Так как представление в виде линейной формы единственно по следствию 1, это и есть представление (10). Теорема доказана.

Из леммы 2 и теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть параметры a_i, b_i, c_j целые, причем $b_i > a_i \geqslant 1$ при $i = 1, \dots, m$ и $c_j \geqslant 1$, $c_1 + \dots + c_j \leqslant q_1 + \dots + q_j$, где $q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i - a_i)$, $j = 1, \dots, l$; d_j – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $d_j \leqslant c_j$ при $j = 1, \dots, l$ и $\sum_{k=j}^{l+1} d_k < a_i$ при $j = 1, \dots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$.*

Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, выполняется равенство

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i - 1} (1 - x_i)^{b_i - a_i - 1}}{\prod_{j=1}^l (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})^{c_j}} \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_m = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z), \quad (11)$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, удовлетворяющим условию $\vec{s} \leqslant (r_1 * (r_2 - r_1) * \dots * (r_l - r_{l-1}))$ (в частности, будут выполняться неравенства $\ell(\vec{s}) \leqslant l$, $w(\vec{s}) \leqslant m$), а $P_{\vec{s}}(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами такие, что

$$\deg P_{\vec{s}}(z) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} b_i - 1$$

для любого вектора $\vec{s}$,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\varnothing}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \dots + d_l, \qquad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \dots + d_l + d_{l+1} + 1 \quad (12)$$

для любого непустого вектора $\vec{s}$ в (11). Дополнительно, если существует j такое, что $d_j < c_j$, то

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\varnothing}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \dots + d_l + 1.$$

Если для любого $j = 1, \dots, l$ выполняется неравенство $c_1 + \dots + c_j \leqslant q_1 + \dots + q_j - 1$, то $P_{\vec{s}}(1) = 0$ для векторов $\vec{s}$ с $s_1 = 1$.

Доказательство. Вначале докажем теорему с менее точной оценкой на порядок нуля многочленов $P_{\vec{s}}(z)$ в точке $z = 0$, а именно,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\varnothing}(z) \geqslant 1, \qquad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i \quad \text{при } \vec{s} \neq \varnothing. \quad (13)$$

Представим интеграл $S(z)$ в виде кратной суммы с помощью леммы 2. Разложим числитель функции $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l)$ (см. (5)) в сумму мономов вида

$$Z \zeta_1^{X_1} \zeta_2^{Y_1 + X_2} \zeta_3^{Y_2 + X_3} \cdots \zeta_l^{Y_{l-1} + X_l},$$

где

$$X_j + Y_j \leqslant c_j - 1, \quad j = 1, \dots, l - 1, \qquad X_l \leqslant c_l - 1, \qquad Z \in \mathbb{Z}.$$

Тогда R разложится в сумму функций $\widetilde{R}(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_l)=\widetilde{R}_1(\zeta_1)\cdots\widetilde{R}_l(\zeta_l)$, где

$$\widetilde{R}_j(\zeta_j)=\frac{\zeta_j^{Y_{j-1}+X_j}}{\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}[(\zeta_j+a_i-1)(\zeta_j+a_i)\cdots(\zeta_j+b_i-2)]},\quad Y_0=0,$$

причем для каждой такой $\widetilde{R}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}I(\widetilde{R}_1)&+I(\widetilde{R}_2)+\dots+I(\widetilde{R}_j)+j\\&=(X_1-q_1)+(Y_1+X_2-q_2)+\dots+(Y_{j-1}+X_j-q_j)+j\\&=(X_1+Y_1+1)+\dots+(X_{j-1}+Y_{j-1}+1)+(X_j+1)-(q_1+q_2+\dots+q_j)\\&\leqslant(c_1+c_2+\dots+c_j)-(q_1+q_2+\dots+q_j)\leqslant 0.\end{aligned}$$

Следовательно, для $\widetilde{R}$ выполняются условия теоремы 1. При этом

$$p=\min_{1\leqslant i\leqslant m}a_i-1,\qquad P=\max_{1\leqslant i\leqslant m}b_i-2.$$

Применяя ее для каждой $\widetilde{R}$, получаем требуемое в теореме равенство.

Докажем теперь более точную оценку (12). В числителе подынтегрального выражения $S(z)$ подставим следующие равенства:

$$(x_1x_2\cdots x_{r_j})^{d_j}=\left(\frac{1-(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}{z}\right)^{d_j},\qquad j=1,\dots,l.$$

Это возможно сделать, так как $\sum_{k=j}^l d_k<a_i$ при $j=1,\dots,l$ и $r_{j-1}<i\leqslant r_j$. В результате получим линейную комбинацию выражений вида

$$\frac{1}{z^{d_1+d_2+\dots+d_l}}\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i'-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})^{c_j'}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m$$

с переменными c_j', причем $0\leqslant c_j'\leqslant c_j$, а $a_i'=a_i-\sum_{k=j}^l d_k\geqslant d_{l+1}+1\geqslant 1$ для $j=1,\dots,l$ и $r_{j-1}<i\leqslant r_j$. Если все $c_j'=0$ (это может быть только в случае $d_j=c_j$ для любого j), то интеграл равен константе и утверждение теоремы выполняется. Пусть теперь есть $c_j'>0$, и j_0 – наибольший такой индекс. Проинтегрировав по переменным x_i, $i>r_{j_0}$, придем к интегралу, для которого выполняются условия теоремы 2 (это следует из того, что они выполнялись для исходного интеграла и того, что $c_j'\leqslant c_j$ и степени множителей $1-x_i$ в интеграле остались прежними), а значит, по теореме 2 с (13) в его разложении $\operatorname{ord}_{z=0}P_\varnothing(z)\geqslant 1$ и $\operatorname{ord}_{z=0}P_{\vec{s}}(z)\geqslant d_{l+1}+1$ для непустого $\vec{s}$. Учитывая множитель $1/z^{d_1+d_2+\dots+d_l}$, приходим к утверждению теоремы.

Так как всегда можно положить $d_j=0$, $j=1,\dots,l$, и $d_{l+1}=\min_{1\leqslant i\leqslant m}a_i-1$, оценка (12) не хуже оценки (13). В общем случае она лучше; например, для интеграла (3) положим $d_1=d_2=\dots=d_{l-1}=n+1$, $d_l=n-s$, $d_{l+1}=0$, откуда $\operatorname{ord}_{z=0}P_{\vec{s}}(z)\geqslant l(n+1)-s$, в том числе и для $\vec{s}=\varnothing$. Если $c_1+c_2+\dots+c_l\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant m}a_i$, то можно подобрать d_j так, что $\sum_{k=j}^l d_k=\min_{1\leqslant i\leqslant m}a_i-1$, $d_{l+1}=0$, и, следовательно, для $P_\varnothing(z)$ верна оценка $\operatorname{ord}_{z=0}P_\varnothing(z)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant m}a_i$ (в общем случае это неверно).

Следствие 2. *Пусть в предыдущих обозначениях выполняется неравенство* $c_1+\dots+c_j\leqslant q_1+\dots+q_j-1$ *для любого* $j=1,\dots,l$. *Тогда интеграл*

$$S=\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l(1-x_1x_2\cdots x_{r_j})^{c_j}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m$$

представляется в виде линейной формы над $\mathbb{Q}$ *от значений кратной дзета-функции, т.е.*

$$S=\sum_{\vec{s}}q_{\vec{s}}\widetilde{\zeta}(\vec{s}),\qquad \widetilde{\zeta}(\vec{s})=\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\dots\geqslant n_l\geqslant1}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}},\quad q_{\vec{s}}\in\mathbb{Q}.$$

На векторы $\vec{s}$ *накладываются те же ограничения, что и в теореме* 2, *а кроме того,* $s_1>1$ (*что гарантирует сходимость ряда, определяющего кратную дзета-функцию*).

Доказательство. Устремим $z\to1-$ в утверждении теоремы 2 (возможность перестановки предела и интеграла гарантируется теоремой Б. Леви (см. [12, с. 348])). Осталось заметить, что

$$\lim_{z\to1-}(1-z)\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)=0\qquad\text{в случае}\quad s_1=1.$$

3. Усиление общей теоремы при некоторых ограничениях. В некоторых случаях разложение (11) в линейную форму содержит в действительности существенно меньше обобщенных полилогарифмов (см., например, представления (2) и (3)), чем гарантируется общей теоремой 2; именно эти случаи оказываются востребованными в арифметических приложениях. Далее нашей задачей будет дать достаточные условия на параметры интеграла $S(z)$, при которых можно значительно сузить множество полилогарифмов, входящих в его разложение. Ограничения на степени многочленов $P_{\vec{s}}$ и их кратности нуля следуют из теоремы 2, и мы не будем упоминать о них.

Для вектора $\vec{s}=(s_1,s_2,\dots,s_l)$ с натуральными компонентами определим функцую

$$R(\vec{s};x)=R(s_1,s_2,\dots,s_l;x)=\sum_{1\leqslant n_l\leqslant\dots\leqslant n_2\leqslant x}\frac{1}{x^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}}.$$

Несложно видеть, что выполняются равенства

$$\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}R(\vec{s};n)z^n,$$
$$R(s_1,s_2,\dots,s_l;x)=\frac{1}{x^{s_1}}\sum_{1\leqslant k\leqslant x}R(s_2,s_3,\dots,s_l;k)\qquad\text{при}\quad l>1.$$

Обозначим через d_n наименьшее общее кратное чисел $1,2,\dots,n$.

Лемма 6. *При целом неотрицательном* α *выполняется равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} R(\vec{s}; n+\alpha) = z^{-\alpha-1} \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z) + P(z^{-1}),$$

где $P(z) = \sum_{k=1}^{\alpha} q_k z^k$ *и* $d_{\alpha+1-k}^{w(\vec{s})} q_k \in \mathbb{Z}$ *(в случае* $\alpha = 0$ *многочлен* $P(z)$ *отсутствует).*

Доказательство. Обозначим левую часть равенства через $L(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} z^{\alpha+1} L(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+\alpha} R(\vec{s}; n+\alpha) = \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} z^n R(\vec{s}; n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n R(\vec{s}; n) - \sum_{n=1}^{\alpha} z^n R(\vec{s}; n) = \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z) - \sum_{n=1}^{\alpha} R(\vec{s}; n) z^n. \end{aligned}$$

Осталось поделить обе части на $z^{\alpha+1}$ и заметить, что $d_n^{w(\vec{s})} R(\vec{s}; n) \in \mathbb{Z}$ и $q_k = R(\vec{s}; \alpha+1-k)$.

Далее будем обозначать через S конечное множество непустых векторов, и определим соответствующее ему множество $S_0 = S \cup \{\varnothing\}$. Через $\mathscr{A}$ будем обозначать конечный отрезок суммирования $[\alpha_1, \alpha_2]$ с целыми неотрицательными α_1, α_2.

Следствие 3. *Пусть функция* $R(x)$ *такова, что для любого натурального* n *выполняется равенство*

$$R(n) = \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} A_{\vec{s},\alpha} R(\vec{s}; n+\alpha), \qquad A_{\vec{s},\alpha} \in \mathbb{C}.$$

Тогда сумма $\sum_{n=1}^{\infty} R(n) z^{n-1}$ *представляется в виде* $\sum_{\vec{s} \in S_0} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$, *причем* $\operatorname{ord}_{z=0} P_{\varnothing}(z) \geqslant 1$ *и для непустого вектора* $\vec{s}$ *имеем* $P_{\vec{s}}(z) = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} A_{\vec{s},\alpha} z^{\alpha+1}$.

Доказательство. Справедливо равенство

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} R(n) z^{n-1} = \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} A_{\vec{s},\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} R(\vec{s}; n+\alpha).$$

Применяя лемму 6, получим

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} A_{\vec{s},\alpha} \bigl(z^{-\alpha-1} \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z) + P_{\vec{s},\alpha}(z^{-1})\bigr) \\ &= \sum_{\vec{s} \in S} \Biggl(\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} A_{\vec{s},\alpha} z^{-\alpha-1}\Biggr) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z) + \sum_{\vec{s} \in S} \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} A_{\vec{s},\alpha} P_{\vec{s},\alpha}(z^{-1}). \end{aligned}$$

Неравенство $\operatorname{ord}_{z=0} P_{\varnothing}(z) \geqslant 1$ следует из леммы 6.

С помощью сравнения коэффициентов в степенных рядах при z^{n-1}, $n \geqslant 1$, показывается следующая лемма, обратная следствию.

Лемма 7. *Пусть сумма* $\sum_{n=1}^{\infty} R(n)z^{n-1}$ *представляется в виде линейной комбинации* $\sum_{\vec{s}\in S_0} P_{\vec{s}}(z^{-1})\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$, *причем* $\operatorname{ord}_{z=0} P_{\varnothing}(z) \geqslant 1$, *а для вектора* $\vec{s} \in S$ *пусть* $P_{\vec{s}}(z) = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} A_{\vec{s},\alpha} z^{\alpha+1}$. *Тогда для любого натурального* n *выполняется равенство*

$$R(n) = \sum_{\vec{s}\in S}\sum_{\alpha\in\mathscr{A}} A_{\vec{s},\alpha} R(\vec{s}; n+\alpha).$$

Леммы 6 и 7 позволяют работать не с бесконечными суммами, а с конечными, зависящими от натурального параметра.

Обозначим через $\mathscr{K}(\vec{T}, p, P)$ линейное пространство функций от n, натянутое на функции $R(\vec{s}, n+\alpha)$, где $\vec{s}$ подчинен вектору $\vec{T}$, и $p \leqslant \alpha \leqslant P$, а через $\mathscr{L}(\vec{T}, p, P)$ – его подпространство, содержащее векторы $\vec{s}$ с $s_j > 1$ при $j > 1$. Также обозначим через $\mathscr{K}_0$ подпространство $\mathscr{K}$ и через $\mathscr{L}_0$ – подпространство $\mathscr{L}$, для элементов которых при каждом $\vec{s} = (1, s_2, \dots)$ сумма коэффициентов по α равна нулю ($\mathscr{L}_0$ также будет подпространством $\mathscr{K}_0$).

Лемма 8. *Пусть* $\alpha'' > \alpha' \geqslant 0$ *– целые числа, а* l, m_1', m_1'', m_j *– натуральные числа. Тогда функция*

$$\frac{1}{(n+\alpha')^{m_1'}} R(m_1'', m_2, \dots, m_l; n+\alpha'')$$

принадлежит пространству $\mathscr{K}_0((\max(m_1', m_1''), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha'')$, *а при* $m_2, \dots, m_l > 1$ *(при* $l = 1$ *считаем это условие выполненным автоматически) и пространству* $\mathscr{L}_0((\max(m_1', m_1''), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha'')$.

Доказательство. Проведем индукцию по l. Запишем разложение в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(n+\alpha')^{m_1'}(n+\alpha'')^{m_1''}} = \sum_{t=1}^{m_1'} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} + \sum_{t=1}^{m_1''} \frac{C_t}{(n+\alpha'')^t}.$$

Имеет место равенство $B_1 + C_1 = 0$, обеспечивающее, в частности, базу индукции ($l = 1$). Пусть $l > 1$, и для $l-1$ лемма верна. Обозначим левую часть доказываемого равенства через L. Имеем

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{(n+\alpha')^{m_1'}(n+\alpha'')^{m_1''}} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\
&= \sum_{t=1}^{m_1'} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) + \sum_{t=1}^{m_1''} \frac{C_t}{(n+\alpha'')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\
&= \sum_{t=1}^{m_1'} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha'} R(m_2, \dots, m_l; k) + \sum_{t=1}^{m_1''} \frac{C_t}{(n+\alpha'')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\
&\quad + \sum_{t=1}^{m_1'} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} \sum_{k=n+\alpha'+1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{t=1}^{m_1'} B_t R(t, m_2, \dots, m_l; n+\alpha') + \sum_{t=1}^{m_1''} C_t R(t, m_2, \dots, m_l; n+\alpha'')$$
$$+ \sum_{t=1}^{m_1'} \sum_{\gamma=\alpha'+1}^{\alpha''} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} R(m_2, \dots, m_l; n+\gamma).$$

Слагаемые
$$\frac{B_t}{(n+\alpha')^t} R(m_2, \dots, m_l; n+\gamma)$$
принадлежат требуемому в утверждении леммы пространству по предположению индукции. Так как $B_1 + C_1 = 0$, выполнено
$$\sum_{t=1}^{m_1'} B_t R(t, m_2, \dots, m_l; n+\alpha') + \sum_{t=1}^{m_1''} C_t R(t, m_2, \dots, m_l; n+\alpha'')$$
$$\in \mathscr{K}_0((\max(m_1', m_1''), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha''),$$
а при $m_2, \dots, m_l > 1$ это выражение также принадлежит пространству $\mathscr{L}_0((\max(m_1', m_1''), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha'')$, что и завершает доказательство леммы.

Лемма 9. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma$ – целые неотрицательные числа такие, что $\alpha_2 + \beta_1 \geqslant \alpha_1$; $u_1, u_2, \dots, u_l$ – натуральные числа. Тогда для любого натурального n_1 выполняется равенство*
$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(u_2, \dots, u_l; n_2+\alpha_2)$$
$$= R(u_1, u_2, \dots, u_l; n_1+\alpha_1) - \frac{E}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} + f(n_1),$$
где $f \in \mathscr{K}_0((u_1, u_2, \dots, u_l), \alpha_1, \alpha_2+\beta_1)$ и константа E зависит только от $(u_2, \dots, u_l)$ и α_2. Дополнительно, если $u_j > 1$ при $j > 2$, то $f \in \mathscr{L}_0((u_1, u_2, \dots, u_l), \alpha_1, \alpha_2+\beta_1)$.

Доказательство. Левая часть доказываемого равенства может быть представлена в виде
$$L = \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=\alpha_2+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} R(u_2, \dots, u_l; n_2).$$
Учитывая неравенство $\alpha_2 + \beta_1 \geqslant \alpha_1$, имеем
$$\sum_{n_2=\alpha_2+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} = \sum_{n_2=1}^{n_1+\alpha_1} + \sum_{n_2=n_1+\alpha_1+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} - \sum_{n_2=1}^{\alpha_2}.$$
Если $\alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1$, то вторая сумма отсутствует (считаем ее равной нулю). Отсюда
$$L = R(u_1, u_2, \dots, u_l; n_1+\alpha_1)$$
$$+ \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=n_1+\alpha_1+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} R(u_2, \dots, u_l; n_2) - \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=1}^{\alpha_2} R(u_2, \dots, u_l; n_2).$$

Обозначим не зависящую от n_1 и α_1 константу $\sum_{n_2=1}^{\alpha_2} R(u_2,\dots,u_l;n_2)$ через E. Остается заметить, что к слагаемым

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}}R(u_2,\dots,u_l;n_1+\alpha_1')$$

при $\alpha_1+1\leqslant\alpha_1'\leqslant\alpha_2+\beta_1$ применима лемма 8. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть β_j, $j=1,\dots,l-1$, и $p_j\leqslant P_j$, T_j, $j=1,\dots,l$, – целые неотрицательные числа, причем $p_{j+1}+\beta_j\geqslant P_j$ для любого $j=1,\dots,l-1$; $R_1(x),\dots,R_l(x)$ – рациональные функции от x, причем $I(R_j)<0$. Полюсы функций $R_j(x)$ сосредоточены в целых точках на отрезке $[-P_j,-p_j]$ и кратности полюсов не превосходят T_j. Тогда*

$$S=R_1(n_1)\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1-1}R_2(n_2)\cdots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\beta_{l-1}-1}R_l(n_l)\in\mathscr{K}\biggl(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\biggr).$$

Если при этом $I(R_j)<-1$ при $j>1$, то $S\in\mathscr{L}\bigl(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\bigr)$. Дополнительно, если $I(R_1)<-1$, то $S\in\mathscr{L}_0\bigl(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\bigr)$.

Доказательство. Проведем индукцию по l. При $l=1$ суммы по $n_2,\dots,n_l$ отсутствуют и утверждение леммы очевидно после разложения R_1 в сумму простых дробей. Пусть $l>1$, и для $l-1$ лемма верна. Применим предположение индукции к выражению $f(n_2)$ в сумме

$$S=R_1(n_1)\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1}f(n_2),\qquad f\in\mathscr{K}\biggl((T_2,T_3,\dots,T_l),m_2,P_l+\sum_{j=2}^{l-1}\beta_j\biggr).$$

Покажем вначале, что S лежит в $\mathscr{K}\bigl(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\bigr)$. В силу линейности достаточно доказать, что

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{t_1}}\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1}R(\vec{u};n_2+\alpha_2)\in\mathscr{K}\biggl(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\biggr),$$

где $p_1\leqslant\alpha_1\leqslant P_1$, $1\leqslant t_1\leqslant T_1$, $\vec{u}=(u_2,\dots,u_l)$ подчинен $(T_2,T_3,\dots,T_l)$, $p_2\leqslant\alpha_2\leqslant P_l+\sum_{j=2}^{l-1}\beta_j$. Это следует из леммы 9.

Пусть теперь $I(R_j)<-1$ при $j>1$. Тогда по предположению индукции

$$f\in\mathscr{L}_0\biggl((T_2,T_3,\dots,T_l),m_2,P_l+\sum_{j=2}^{l-1}\beta_j\biggr).$$

В качестве образующих $\mathscr{L}_0$ возьмем $R(\vec{u};n_2+\alpha_2)$ с $u_j>1$ и $R(\vec{u};n_2+\alpha_2'')-R(\vec{u};n_2+\alpha_2')$ с $u_2=1$ и $u_j>1$ при $j>2$. При $u_j>1$ по лемме 9

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{t_1}}\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1}R(\vec{u};n_2+\alpha_2)\in\mathscr{L}\biggl(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\biggr),$$

а если $t_1 > 1$, то также принадлежит $\mathscr{L}_0$. Пусть теперь $u_2 = 1$ и $u_j > 1$ при $j > 2$. Тогда по лемме 9

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{t_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} \bigl(R(\vec{u}; n_2+\alpha_2'') - R(\vec{u}; n_2+\alpha_2')\bigr) = \frac{E_{\vec{u},\alpha_2'} - E_{\vec{u},\alpha_2''}}{(n_1+\alpha_1)^{t_1}} + g(n_1),$$

$$g \in \mathscr{L}_0\biggl(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j\biggr),$$

а следовательно, и все выражение лежит в $\mathscr{L}$, а при $t_1 > 1$ и в $\mathscr{L}_0$. Осталось доказать утверждение леммы при $I(R_1) < -1$. В этом случае вместо $R_1(x)$ мы можем рассматривать функции

$$\frac{1}{(x+\alpha_1)^{t_1}}, \quad t_1 > 1, \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{x+\alpha_1''} - \frac{1}{x+\alpha_1'}.$$

Случай $t_1 > 1$ разобран выше. Аналогично показывается, что при $u_j > 1$

$$\biggl(\frac{1}{n_1+\alpha_1''} - \frac{1}{n_1+\alpha_1'}\biggr) \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(\vec{u}; n_2+\alpha_2) \in \mathscr{L}_0\biggl(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j\biggr),$$

а при $u_2 = 1$ и $u_j > 1$, $j > 2$,

$$\biggl(\frac{1}{n_1+\alpha_1''} - \frac{1}{n_1+\alpha_1'}\biggr) \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} \bigl(R(\vec{u}; n_2+\alpha_2'') - R(\vec{u}; n_2+\alpha_2')\bigr) \in \mathscr{L}_0\biggl(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j\biggr).$$

Лемма полностью доказана.

Перейдем теперь к представлению интеграла $S(z)$ (см. (4)) в виде линейной формы от обобщенных полилогарифмов.

Теорема 3. *Пусть выполнены неравенства $c_1 + \dots + c_j \leqslant q_1 + \dots + q_j$ и $a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geqslant 0$ при всех $j = 1, \dots, l$, $i_1 \in [r_{j-1}+1, r_j]$, $i_2 \in [r_j+1, r_{j+1}]$. Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, верно равенство $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$, где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, подчиненным $(r_1, r_2 - r_1, \dots, r_l - r_{l-1})$. Дополнительно, если $c_1 \leqslant q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leqslant q_j$ при $j = 2, \dots, l$, то в этих векторах $\vec{s}$ выполняется $s_j > 1$ при $j > 1$.*

Доказательство. Разложим интеграл в кратную сумму (см. лемму 2)

$$S(z) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{n_1} \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} z^{n_1-1} \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(b_i - a_i)}{\prod_{j=1}^{l} \Gamma(c_j)}$$
$$\times \frac{\prod_{j=1}^{l} [(n_j - n_{j+1} + 1)(n_j - n_{j+1} + 2) \cdots (n_j - n_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(n_j + a_i - 1)(n_j + a_i) \cdots (n_j + b_i - 2)]}, \qquad n_{l+1} \equiv 1. \tag{14}$$

Заметим, что суммирование n_{j+1} можно вести не до n_j, а до $n_j + c_j - 1$, так как добавленные слагаемые равны нулю. Далее мы действуем так же, как и при доказательстве теоремы 2. Разложим числитель суммируемой функции в сумму мономов вида

$Zn_1^{X_1}n_2^{Y_1+X_2}n_3^{Y_2+X_3}\cdots n_l^{Y_{l-1}+X_l}$, где $X_j+Y_j\leqslant c_j-1$, $Y_l=0$, $Z\in\mathbb{Z}$. Теперь при фиксированных X_j, Y_j рассмотрим сумму

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1}R_1(n_1)\sum_{n_2=1}^{n_1+c_1-1}R_2(n_2)\cdots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+c_{l-1}-1}R_l(n_l), \tag{15}$$

где

$$R_j(n_j)=\frac{n_j^{Y_{j-1}+X_j}}{\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}[(n_j+a_i-1)(n_j+a_i)\cdots(n_j+b_i-2)]},\qquad Y_0=0.$$

Рассмотрим вначале случай $c_1\leqslant q_1$ и $c_{j-1}+c_j\leqslant q_j$ при $j=2,\dots,l$. В этом случае $I(R_1)\leqslant -1$ и $I(R_j)<-1$ при $j>1$. Применим к сумме (15) лемму 10. При этом $\vec{T}=(r_1,r_2-r_1,\dots,r_l-r_{l-1})$, $\beta_j=c_j-1$,

$$m_j=\min_{r_{j-1}+1\leqslant i\leqslant r_j}a_i-1,\qquad P_j=\max_{r_{j-1}+1\leqslant i\leqslant r_j}b_i-2,$$

и необходимые неравенства на p_j и P_j выполняются вследствие неравенств $a_{i_2}+c_j-b_{i_1}\geqslant 0$ для всех $j=1,\dots,l$, $i_1\in[r_{j-1}+1,r_j]$, $i_2\in[r_j+1,r_{j+1}]$. Следовательно, сумма (15) лежит в $\mathscr{L}\big(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\big)$. Для перехода к линейным формам от полилогарифмов воспользуемся леммой 6.

В более общем случае, при $c_1+\dots+c_j\leqslant q_1+\dots+q_j$, сумма (15) является δ-суммой с неравенствами $p_{j+1}+\delta_j\geqslant P_j$ вследствие ограничений на параметры интеграла. С помощью леммы 5 представим (15) в виде линейной комбинации δ-сумм с $I(R_j)<0$, в каждой из которых также выполнены неравенства $p_{j+1}+\delta_j\geqslant P_j$. Поэтому к ним можно применить лемму 10, причем вектор $\vec{T}$ в этих суммах подчинен $(r_1,r_2-r_1,\dots,r_l-r_{l-1})$, а значит, сумма (15) принадлежит $\mathscr{K}\big((r_1,r_2-r_1,\dots,r_l-r_{l-1}),p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\big)$. После этого применяем лемму 6.

Полагая в теореме $r_j=j$ при $j=1,\dots,l$, получим

Следствие 4. *При $a_{i+1}+c_i-b_i\geqslant 0$ для $i=1,\dots,l-1$ и $\sum_{i=1}^{j}(b_i-a_i-c_i)\geqslant 0$ для любого $j=1,\dots,l$ справедливо разложение*

$$\int_{[0,1]^l}\frac{\prod_{i=1}^{l}x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_j)^{c_j}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_l=\sum_{k=0}^{l}P_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{\{1\}_k}(z).$$

Полагая в теореме $r_j=2j$ при $j=1,\dots,l$, получим

Следствие 5. *Пусть*

$$(b_{2j-1}-a_{2j-1})+(b_{2j}-a_{2j})\geqslant c_{j-1}+c_j,\quad j=1,\dots,l,\qquad c_0=0,$$
$$a_{i_2}+c_j-b_{i_1}\geqslant 0,\qquad i_1\in[2j-1,2j],\quad i_2\in[2j+1,2j+2],\quad j=1,\dots,l-1.$$

Тогда справедливо разложение

$$\int_{[0,1]^{2l}}\frac{\prod_{i=1}^{2l}x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{2j})^{c_j}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l}$$
$$=\sum_{k=0}^{l}P_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z)+\sum_{k=0}^{l-1}T_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z).$$

Дополнительно, если $(b_1-a_1)+(b_2-a_2)>c_1$, то $T_k(1)=0$ для любого $k=1,\dots,l-1$.

Полагая в теореме $r_j=2j-1$ при $j=1,\dots,l+1$, получим

Следствие 6. *Пусть*

$$
\begin{gathered}
b_1 - a_1 \geqslant c_1, \qquad (b_{2j-2} - a_{2j-2}) + (b_{2j-1} - a_{2j-1}) \geqslant c_{j-1} + c_j, \quad j = 2, \ldots, l, \\
a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geqslant 0, \qquad i_1 \in [\max(1, 2j-2), 2j-1], \quad i_2 \in [2j, 2j+1], \quad j = 1, \ldots, l-1.
\end{gathered}
$$

Тогда справедливо разложение

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l+1}(1 - zx_1x_2\cdots x_{2j-1})^{c_j}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l+1} \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l} T_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z).
\end{aligned}
$$

С помощью этих следствий получим представления для интеграла $V(z)$ (обобщения интегралов $V_{m,n}$ в (1)). В следующей теореме рассмотрен случай четного m.

Теорема 4. *Пусть параметры* A_i, $i = 0, \ldots, 2l$, B_i, $i = 1, \ldots, 2l$, – *натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$
\begin{gathered}
B_i > A_i > 0 \quad \text{при всех } i, \qquad B_i > A_{i-2} \quad \text{при четных } i, \\
A_3 \geqslant A_2,\ A_5 \geqslant A_4,\ \ldots,\ A_{2l-1} \geqslant A_{2l-2}, \qquad B_2 \geqslant B_1,\ B_4 \geqslant B_3,\ \ldots,\ B_{2l-2} \geqslant B_{2l-3}, \\
A_2 + B_1 \geqslant A_0 + A_1,\ A_4 + B_3 \geqslant A_3 + B_2,\ \ldots,\ A_{2l} + B_{2l-1} \geqslant A_{2l-1} + B_{2l-2}.
\end{gathered}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1 - zx_1 + zx_1x_2 - zx_1x_2x_3 + \cdots + zx_1x_2\cdots x_{2l})^{A_0}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l} \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Имеем равенство (см. [7, теорема 1] или [9, теорема])

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1 - zx_1 + zx_1x_2 - zx_1x_2x_3 + \cdots + zx_1x_2\cdots x_{2l})^{A_0}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l} \\
&\qquad = \gamma \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{B_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\ldots x_{2j})^{B_{2j}-A_{2j}}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l},
\end{aligned}
$$

где

$$
\gamma = \frac{\Gamma(A_{2l})}{\Gamma(A_0)} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(B_{2j} - A_{2j})}{\Gamma(B_{2j} - A_{2j-2})},
$$

$a_i = A_i$ при нечетном i и $a_i = A_{i-2}$ при четном i. Далее применяем следствие 5.

Для разложения интегралов $V(z)$ при нечетном m воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 11. *Пусть параметры* A_i, $i=0,\dots,2l+1$, B_i, $i=1,\dots,2l+1$, – *натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$\begin{gathered} B_i>A_i>0 \quad \text{при всех } i, \qquad B_1>A_0, \quad B_i>A_{i-2} \quad \text{при нечетных } i\geqslant 3, \\ A_2\geqslant A_1,\ A_4\geqslant A_3,\ \dots,\ A_{2l}\geqslant A_{2l-1}, \qquad B_3\geqslant B_2,\ B_5\geqslant B_4,\ \dots,\ B_{2l-1}\geqslant B_{2l-2}, \\ A_1\geqslant A_0,\ A_3+B_2\geqslant A_2+B_1,\ A_5+B_4\geqslant A_4+B_3,\ \dots,\ A_{2l+1}+B_{2l}\geqslant A_{2l}+B_{2l-1}. \end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1-z+zx_1-zx_1x_2+zx_1x_2x_3-\dots+zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l+1} \\ &\qquad =\sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z)+\sum_{k=0}^{l} T_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z). \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем равенство (см. теорему из [9])

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{(1-z+zx_1-zx_1x_2+zx_1x_2x_3-\dots+zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l+1} \\ &\qquad =\gamma\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{B_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l+1}(1-zx_1x_2\cdots x_{2j-1})^{B_{2j-1}-A_{2j-1}}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l+1}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma=\frac{\Gamma(A_{2l+1})}{\Gamma(A_0)}\,\frac{\Gamma(B_1-A_1)}{\Gamma(B_1-A_0)}\prod_{j=1}^{l}\frac{\Gamma(B_{2j+1}-A_{2j+1})}{\Gamma(B_{2j+1}-A_{2j-1})},$$

$a_i=A_i$ при четном i, $a_1=A_0$ и $a_i=A_{i-2}$ при нечетном $i\geqslant 3$. Далее применяем следствие 6.

Можно доказать аналоги лемм 8–10 и теоремы 3 для обобщенных полилогарифмов со строгими неравенствами $\operatorname{Li}_{\vec s}(z)$. При этом вместо функции $R(\vec s;x)$ используется

$$\widehat{R}(s_1,s_2,\dots,s_l;x)=\sum_{1\leqslant n_l<\dots<n_2<x}\frac{1}{x^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}},$$

а неравенства $p_{j+1}+\beta_j\leqslant P_j$ заменяются на $p_j>P_j$. Так мы доказываем следующую теорему, которая является аналогом теоремы 3.

Теорема 5. *Пусть выполнены неравенства* $c_1+\dots+c_j\leqslant q_1+\dots+q_j$ *и* $a_{i_1}\geqslant b_{i_2}$ *при всех* $j=1,\dots,l$, $i_1\in[r_{j-1}+1,r_j]$, $i_2\in[r_j+1,r_{j+1}]$. *Тогда для* $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$, *верно равенство* $S(z)=\sum_{\vec s}P_{\vec s}(z^{-1})\operatorname{Li}_{\vec s}(z)$, *где суммирование ведется по векторам* $\vec s$, *подчиненным* $(r_1,r_2-r_1,\dots,r_l-r_{l-1})$. *Дополнительно, если* $c_1\leqslant q_1$ *и* $c_{j-1}+c_j\leqslant q_j$ *при* $j=2,\dots,l$, *то в этих векторах* $\vec s$ *выполняется* $s_j>1$ *при* $j>1$.

Полагая в теореме $r_j=j$ при $j=1,\dots,l$, получим

Следствие 7. *При* $b_1 > a_1 \geqslant b_2 > a_2 \geqslant \dots \geqslant b_l > a_l$ *и* $\sum_{i=1}^{j}(b_i - a_i - c_i) \geqslant 0$ *для любого* $j = 1, \dots, l$ *справедливо разложение*

$$\int_{[0,1]^l} \frac{\prod_{i=1}^{l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\cdots x_j)^{c_j}}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_l = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_k}(z).$$

Полагая в теореме $r_j = 2j$ при $j = 1, \dots, l$, получим

Следствие 8. *Пусть*

$$\begin{gathered}(b_{2j-1} - a_{2j-1}) + (b_{2j} - a_{2j}) \geqslant c_{j-1} + c_j, \quad j = 1, \dots, l, \qquad c_0 = 0,\\ a_{i_1} \geqslant b_{i_2}, \qquad i_1 \in [2j-1, 2j], \quad i_2 \in [2j+1, 2j+2], \quad j = 1, \dots, l-1.\end{gathered}$$

Тогда справедливо разложение

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^{2l}} &\frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\cdots x_{2j})^{c_j}}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_{2l}\\ &= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{1,\{2\}_k}(z).\end{aligned}$$

В частном случае эта аналитическая конструкция использовалась в [6].

Для дальнейшего нам потребуется теорема о поведении обобщенных полилогарифмов при преобразовании $z \mapsto -z/(1-z)$.

Пусть у нас есть вектор $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ с натуральными компонентами. Сопоставим ему вектор $\vec{s}\,'$ по следующему правилу:

$$\vec{s}\,' = (\{1\}_{s_1-1}, 2, \{1\}_{s_2-2}, \dots, 2, \{1\}_{s_{l-1}-2}, 2, \{1\}_{s_l-1});$$

если $s_k = 1$ при некотором k, $1 < k < l$, то вместо '$2, \{1\}_{s_k-2},$' следует писать '$1+$'.

Будем называть вектор $\vec{s}\,'$ *двойственным к* $\vec{s}$, так как из определения $\vec{s}\,'$ следует, что $(\vec{s}\,')' = \vec{s}$. Если $\vec{s} \neq (1)$, то один и только один из двойственных векторов начинается с единицы, а их веса равны. Е. А. Уланский подсказал следующее определение двойственного вектора. Сопоставим вектору $\vec{s}$ слово $x_0^{s_1-1}x_1 \dots x_0^{s_k-1}x_1 = vx_1$. Пусть σ – отображение, действующее на таких словах и меняющее буквы x_0 и x_1 между собой. Тогда двойственный вектор $\vec{s}\,'$ соответствует слову $\sigma(v)x_1$. Далее нам понадобятся следующие пары двойственных векторов: $(1, \{2\}_k) \leftrightarrow (\{2\}_k, 1)$ и $(\{2\}_k) \leftrightarrow (1, \{2\}_{k-1}, 1)$.

Лемма 12 (о двойственности). *Пусть* $|z| < 1$ *и* $|z| < |1 - z|$. *Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{Le}_{\vec{s}}\biggl(-\frac{z}{1-z}\biggr) = -\operatorname{Le}_{\vec{s}\,'}(z).$$

Доказательство. При $z=0$ утверждение очевидно, поэтому далее считаем $z\neq 0$. Воспользуемся интегральным представлением $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ из леммы 3:

$$\mathrm{Le}_{s_1,s_2,\dots,s_l}(z)=z\int_{[0,1]^m}\frac{dx_1\,dx_2\cdots dx_m}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})},$$

где $r_j=s_1+s_2+\dots+s_j$, $m=r_l$. Преобразуем интеграл с помощью теоремы из [9] для $a_i=1$, $b_i=2$:

$$\int_{[0,1]^m}\frac{dx_1\,dx_2\cdots dx_m}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{r_j})}=\int_{[0,1]^m}\frac{dx_1\,dx_2\cdots dx_m}{1-zQ_{\vec{s}}(x_1,x_2,\dots,x_m)},\tag{16}$$

где

$$Q_{\vec{s}}(x_1,x_2,\dots,x_m)=x_1\cdots x_{r_1-1}-x_1\cdots x_{r_1}+\dots+x_1\cdots x_{r_l-1}-x_1\cdots x_{r_l}.$$

Подставим вместо z в равенство (16) дробь $-z/(1-z)$:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^m}\frac{dx_1\,dx_2\cdots dx_m}{1+zQ_{\vec{s}}(x_1,x_2,\dots,x_m)/(1-z)}&=(1-z)\int_{[0,1]^m}\frac{dx_1\,dx_2\cdots dx_m}{1-z+zQ_{\vec{s}}(x_1,x_2,\dots,x_m)}\\&=(1-z)\int_{[0,1]^m}\frac{dx_1\,dx_2\cdots dx_m}{1-zQ'_{\vec{s}}(x_1,x_2,\dots,x_m)},\end{aligned}\tag{17}$$

где $Q'_{\vec{s}}(x_1,x_2,\dots,x_m)=1-Q_{\vec{s}}(x_1,x_2,\dots,x_m)$. Сделаем в последнем интеграле замену $x_m\mapsto 1-x_m$ и заметим, что

$$\begin{aligned}Q'_{\vec{s}}(x_1,x_2,\dots,1-x_m)&=x_1\cdots x_{r'_1-1}-x_1\cdots x_{r'_1}+\dots+x_1\cdots x_{r'_{l'}-1}-x_1\cdots x_{r'_{l'}}\\&=Q_{\vec{s}'}(x_1,x_2,\dots,x_m)\end{aligned}$$

соответствует вектору $\vec{s}'$ (собственно это и мотивирует его определение). Здесь мы использовали обозначения $l'=\ell(\vec{s}')$ и $r'_j=s'_1+s'_2+\dots+s'_j$. Снова сворачивая интеграл (после замены) в правой части (17) по тождеству из [9], запишем равенство (17) на языке полилогарифмов:

$$\frac{\mathrm{Le}_{\vec{s}}(-z/(1-z))}{-z/(1-z)}=(1-z)\frac{\mathrm{Le}_{\vec{s}'}(z)}{z},$$

что равносильно утверждению теоремы.

Используя лемму 11 и преобразование $z\mapsto -z/(1-z)$, можно доказать следующую теорему, дающую разложение $V(z)$ при нечетном m.

Теорема 6. *Пусть параметры A_i, $i=0,\dots,2l+1$, B_i, $i=1,\dots,2l+1$, – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам леммы 11 и, дополнительно, $B_{2j}>A_{2j-2}$ при $j=1,\dots,l$, $B_{2l+1}>A_{2l}$ и $\sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1}-A_{2j-1})\geqslant A_0$. Тогда*

$$\begin{aligned}I(z)&=\int_{[0,1]^{2l+1}}\frac{\prod_{i=1}^{2l+1}x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}dx_1\,dx_2\cdots dx_{2l+1}}{(1-zx_1+zx_1x_2-zx_1x_2x_3+\dots-zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}}\\&=\sum_{k=0}^{l}P_k(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\{2\}_k,1}(z)+\sum_{k=0}^{l-1}T_k(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,\{2\}_k,1}(z)+U(z^{-1}).\end{aligned}$$

Доказательство. Так как $B_i > A_i > 0$ при всех i, а также $B_{2j} > A_{2j-2}$ при $j = 1, \dots, l$ и $B_{2l+1} > A_{2l}$, то (см. [7, теорема 2] или [9, теорема])

$$I(z) = \gamma \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{B_i-a_i-1} dx_1\, dx_2 \cdots dx_{2l+1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{2j})^{B_{2j}-A_{2j}}(1-zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_{2l+1}}},$$

где

$$\gamma = \frac{\Gamma(A_{2l+1})}{\Gamma(A_0)} \frac{\Gamma(B_{2l+1}-A_{2l+1})}{\Gamma(B_{2l+1}-A_{2l})} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(B_{2j}-A_{2j})}{\Gamma(B_{2j}-A_{2j-2})},$$

$a_i = A_i$ при нечетном $i < 2l$, $a_{2l+1} = A_{2l}$ и $a_i = A_{i-2}$ при четном i. Проверим теперь условие $c_1 + \dots + c_k \leqslant q_1 + \dots + q_k$ при $k = 1, \dots, l+1$ для интеграла в правой части, которое дает разложение в линейную форму от полилогарифмов по теореме 2. При $k = 1, \dots, l$ имеем

$$\begin{aligned}(q_1 + \dots + q_k) - (c_1 + \dots + c_k) &= \sum_{j=1}^{k}(B_j - A_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k}(B_{2j} - A_{2j}) \\ &= (A_{2k} - A_{2k-1}) + (B_1 - A_0) + \sum_{j=2}^{k}(B_{2k-1} - A_{2k-3}) > 0\end{aligned}$$

(в оценке использовались неравенства на параметры A_i, B_i из условия леммы 11). При $k = 2l+1$

$$(q_1 + \dots + q_{2l+1}) - (c_1 + \dots + c_{2l+1}) = \sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1} - A_{2j-1}) - A_0 \geqslant 0.$$

Обозначим интеграл, фигурирующий в лемме 11, через $J(z)$. Имеем равенство

$$\begin{aligned}I(z) &= \frac{1}{(1-z)^{A_0}} J\left(\frac{-z}{1-z}\right) \\ &= \frac{1}{(1-z)^{A_0}} \left(\sum_{k=0}^{l} P_k\left(-\frac{1-z}{z}\right) \mathrm{Le}_{1,\{2\}_k}\left(\frac{-z}{1-z}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=0}^{l} T_k\left(-\frac{1-z}{z}\right) \mathrm{Le}_{\{2\}_k}\left(\frac{-z}{1-z}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{l} \widetilde{P}_k(z)\, \mathrm{Le}_{\{2\}_k,1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} \widetilde{T}_k(z)\, \mathrm{Le}_{1,\{2\}_k,1}(z) + \widetilde{U}(z),\end{aligned}$$

где $\widetilde{P}_k(z)$, $\widetilde{T}_k(z)$, $\widetilde{U}(z)$ – рациональные функции. В последнем равенстве мы использовали лемму 12 для пар векторов $(1, \{2\}_k) \leftrightarrow (\{2\}_k, 1)$ и $(\{2\}_k) \leftrightarrow (1, \{2\}_{k-1}, 1)$ (мы считаем, что $\mathrm{Le}_{\varnothing}(z) = 1$ и $T_0(z)$ дает слагаемое $\widetilde{U}(z)$). Сравнивая с разложением

$I(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$ и учитывая линейную независимость обобщенных полилогарифмов над $\mathbb{C}(z)$, заключаем, что функции $\widetilde{P}_k(z), \widetilde{T}_k(z), \widetilde{U}(z)$ в действительности являются многочленами от аргумента z^{-1}. В промежуточных выкладках предполагается, что z находится в области $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ |z| < |1-z|\}$. Но в конечном равенстве, с помощью аналитического продолжения, можно считать, что $|z| < 1$. Теорема доказана.

Из равенств $\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(1) = 2(1 - 2^{1-2k})\zeta(2k)$ и $\operatorname{Le}_{\{2\}_k,1}(1) = 2\zeta(2k+1)$ (см. [13] и [7]) следует, что в условиях теорем 4 и 6 интегралы $V_m(1)$ могут быть представлены в виде линейной формы от 1 и чисел $\zeta(k)$ с рациональными коэффициентами, где натуральные k имеют ту же четность, что и m. С помощью теоремы 6 и теоремы 2 из [7] показывается разложение интеграла из [5].

Автор выражает благодарность чл.-корр. РАН Ю. В. Нестеренко за помощь, оказанную при написании статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Beukers F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. № 3. P. 268–272.

[2] Василенко О. Н. Некоторые формулы для значения дзета-функции Римана в целых точках // Республиканская научно-теоретическая конференция “Теория чисел и ее приложения” (Ташкент, 26–28 сентября 1990 г.). Тезисы докл. Ташкент: Ташкентский госпединститут, 1990. С. 27.

[3] Vasilyev D. V. On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd integers // Preprint № 1 (558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001.

[4] Зудилин В. В. Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 177–178.

[5] Сорокин В. Н. Теорема Апери // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 48–52.

[6] Сорокин В. Н. О мере трансцендентности числа π^2 // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–120.

[7] Злобин С. А. Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 782–787.

[8] Fischler S. Formes linéaires en polyzêtas et intégrales multiples // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2002. V. 335. P. 1–4.

[9] Злобин С. А. О некоторых интегральных тождествах // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 153–154.

[10] Hoang Ngoc Minh, Petitot M., Van Der Hoeven J. Shuffle algebra and polylogarithms // Discrete Math. 2000. V. 225. № 1–3. P. 217–230.

[11] Уланский Е. А. Тождества для обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 613–624.

[12] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[13] Васильев Д. В. Некоторые формулы для дзета-функции Римана в целых точках // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 1. С. 81–84.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
08.12.2003
Исправленный вариант
13.10.2004