Математические заметки

Том 84 выпуск 4 октябрь 2008

УДК 517.51

Интегралы по многогранникам, кратные дзета значения и полилогарифмы, и константа Эйлера

Дж. Сондоу, С. А. Злобин

Пусть T – треугольник с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. Рассматриваются некоторые интегралы по T, один из которых был вычислен еще Эйлером. Приводятся выражения для этих интегралов как в виде линейной комбинации кратных дзета значений, так и в виде полинома относительно обычных дзета значений. Получены асимптотические разложения интегралов и сумм некоторых кратных дзета значений с постоянным весом. Также представлены соответствующие выражения для константы Эйлера. В заключительном пункте вычисляются более общие интегралы, один из которых – повторный интеграл Чена (Дринфилда–Концевича), по некоторым многогранникам, являющимся многомерными аналогами треугольника T. Это приводит к соотношению, связывающему некоторые кратные полилогарифмические значения и кратные дзета значения.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Пусть T – треугольник, заданный выражением

$$T := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x+y \geqslant 1\},$$

с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. В данной работе мы изучаем интеграл по треугольнику T

$$I_n := \iint_T \frac{(-\ln xy)^n}{xy}\,dx\,dy \tag{1}$$

для $n=-1,0,1,2,\dots$. Мы также рассматриваем интегралы по нескольким многогранникам, которые являются многомерными аналогами треугольника T.

Эйлер вычислил повторный интеграл, эквивалентный I_0, и получил, что

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_T \frac{dx\,dy}{xy} = \int_0^1 \frac{1}{x}\int_{1-x}^1 \frac{dy}{y}\,dx = \int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{x}\,dx \\ &= \int_0^1 \sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{r-1}}{r}\,dx = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} = \zeta(2). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, он вывел формулу (22), которую использовал для вычисления $\zeta(2)$ с точностью до шестого знака после запятой, см. [1; раздел 1.2], [2; с. 43–45].

Мы обобщаем результат Эйлера на случай $n = 0, 1, 2, \dots$, показав, что I_n равен целой линейной комбинации *кратных дзета значений*

$$\zeta(s_1, \dots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}$$

с весом $s_1 + \dots + s_l = n + 2$. Мы также представим I_n в виде полинома относительно обычных дзета значений.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 0$ – целое число.*

(i) *Тогда*

$$I_n = n! \sum_{k=0}^{n} \zeta(n - k + 2, \{1\}_k), \tag{2}$$

где через $\{1\}_k$ обозначен набор $1, 1, \dots, 1$ (k раз).

(ii) *Кроме того, I_n является полиномом в явной форме от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно значений дзета функции Римана $\zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(n + 2)$.*

Теорема 1, следствие 1 и лемма 1 были получены вторым автором в [3]. Доказательство этих результатов приведено в п. 2, вместе с явными формулами. Рассмотрены следующие примеры:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \zeta(2), \\
I_1 &= \zeta(3) + \zeta(2, 1) = 2\zeta(3), \\
I_2 &= 2(\zeta(4) + \zeta(3, 1) + \zeta(2, 1, 1)) = \frac{9}{2}\zeta(4), \\
I_3 &= 6(\zeta(5) + \zeta(4, 1) + \zeta(3, 1, 1) + \zeta(2, 1, 1, 1)) = 36\zeta(5) - 12\zeta(2)\zeta(3).
\end{aligned} \tag{3}$$

Случаи $n = 0, 1, 2$ особенно простые.

Следствие 1. *При $n = 0, 1, 2$ интеграл I_n является рациональным кратным числа $\zeta(n + 2)$.*

При $n = 0, 1$ это также следует из формул, полученных Бейкерсом [4] для $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ в виде интегралов по единичному квадрату

$$S := [0, 1]^2.$$

Именно, замена переменных $x = X$, $y = 1 - XY$ преобразует как I_0 в

$$I_0 = \iint_T \frac{dx\,dy}{xy} = \iint_S \frac{dX\,dY}{1 - XY} = \zeta(2),$$

так и $(1/2)I_1$ в

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} I_1 &= \frac{1}{2} \iint_T \frac{-\ln xy}{xy}\,dx\,dy = \iint_T \frac{-\ln x}{xy}\,dx\,dy \\
&= \iint_S \frac{-\ln X}{1 - XY}\,dX\,dY = \frac{1}{2} \iint_S \frac{-\ln XY}{1 - XY}\,dX\,dY = \zeta(3).
\end{aligned}$$

Приведем схему доказательства теоремы 1, но сначала сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. *Если $k \geqslant 0$ и $l \geqslant 0$ – целые числа, то*

$$I_{k,l} := \iint_T \frac{(-\ln x)^k(-\ln y)^l}{xy}\,dx\,dy = k!\,l!\,\zeta(l+2,\{1\}_k). \tag{4}$$

Кроме того, если $l \geqslant 1$, то

$$J_{k,l} := \int_0^1 \frac{(-\ln(1-x))^k}{1-x}(-\ln x)^l\,dx = k!\,l!\,\zeta(l+1,\{1\}_k). \tag{5}$$

Разлагая $(-\ln x - \ln y)^n$ в ряд, мы сразу получим утверждение (i). Чтобы закончить доказательство леммы, покажем, что $(l+1)I_{k,l} = J_{k,l+1}$, и затем вычислим интеграл $J_{k,l}$. Утверждение (ii) теоремы 1 доказывается с помощью формулы, полученной в [5], где $J_{k,l}$ выражено через обычные дзета значения.

В качестве примера получим явную версию результата, доказанного в [6].

Следствие 2. *Если $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 0$, то кратные дзета значения $\zeta(n,\{1\}_k)$ можно представить в явном виде как полином от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно обычных дзета значений $\zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(n+k)$.*

Лемма 1 также дает простое доказательство частного случая теоремы двойственности для кратных дзета значений (см., например, [1; раздел 2.8]).

Следствие 3. *Если $k \geqslant 0$ и $l \geqslant 0$, то*

$$\zeta(k+2,\{1\}_l) = \zeta(l+2,\{1\}_k).$$

Например, $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ и $\zeta(2,1,1) = \zeta(4)$. С помощью этих равенств мы дадим второе доказательство следствия 1. Однако в отличие от случаев $n = 0$ и 1 утверждение следствия 1 в случае $n = 2$ мы не можем доказать без использования теоремы 1.

Используя численные результаты и примеры, такие как (3), мы сделаем следующее

Предположение 1. *Интеграл I_n не является рациональным кратным числа $\zeta(n+2)$ при $n > 2$.*

Это утверждение не было доказано ни для одного значения n. Однако с помощью теоремы 1, (ii) мы можем привести условное доказательство для всех $n = 3, 4, \dots$ при стандартном предположении (см., например, [7; введение]).

Теорема 2. *Если числа π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, … алгебраически независимы над полем рациональных чисел, то предположение 1 верно.*

С помощью леммы, которая дает асимптотическое разложение для коэффициентов ряда Тейлора некоторых мероморфных функций (лемма 2), мы оценим I_n при больших n.

Теорема 3. *Имеет место асимптотическая эквивалентность*

$$I_n \sim 2n!, \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

Более точно, имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\frac{I_n}{n!} \approx 2 + \frac{6}{2^{n+2}} + \frac{20}{3^{n+2}} + \frac{70}{4^{n+2}} + \cdots, \qquad n \to \infty,$$

где числитель в k-м члене имеет вид $\binom{2k}{k}$ при $k = 1, 2, \dots$.

Это в свою очередь дает оценку для суммы кратных дзета значений $\zeta(m-k,\{1\}_k)$ с постоянным весом m.

Следствие 4. *Среднее кратных дзета значений* $\zeta(m),\zeta(m-1,1),\dots,\zeta(2,\{1\}_{m-2})$ *асимптотически стремится к* $2/m$ *при* m *стремящемся к бесконечности. Точнее, имеет место следующее асимптотическое разложение*:

$$\sum_{k=0}^{m-2}\zeta(m-k,\{1\}_k)\approx 2+\frac{6}{2^m}+\frac{20}{3^m}+\frac{70}{4^m}+\cdots,\qquad m\to\infty.$$

Еще одно применение теоремы 3 дает следующий любопытный результат.

Следствие 5. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{I_n}{n!}$$

расходится, но является суммируемым по Абелю, и его сумма равна $1/2$.

Пойдем "вниз" от I_0 к I_{-1}.

Вопрос. *Можно ли вычислить интеграл*

$$I_{-1}=\iint_T\frac{dx\,dy}{xy(-\ln xy)}=1.7330025\dots,\tag{7}$$

используя более известные константы?

Удивительно, но оказалось, что I_{-1} содержит в себе все интегралы $I_0,I_1,I_2,\dots$ (и, следовательно, все кратные дзета значения $\zeta(m,\{1\}_k)$ при $m\geqslant 2$ и $k\geqslant 0$).

Теорема 4. *Если* li – *логарифмическая целая функция, то*

$$I_{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{I_n}{(n+1)!}+\int_0^1\frac{\operatorname{li}(x-x^2)}{x}\,dx+1.$$

(Ср. сходящийся ряд здесь и расходящийся ряд в следствии 5.)

Теперь мы выразим двойной интеграл I_{-1} через простые интегралы, один из которых содержит *обобщенный биномиальный коэффициент*

$$\binom{s}{t}:=\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(t+1)\Gamma(s-t+1)}.$$

Предложение 1. *Имеют место следующие интегральные формулы для* I_{-1}:

$$I_{-1}=\int_0^{\infty}\left(1-\frac{1}{\binom{2t}{t}}\right)\frac{dt}{t^2}=\int_0^1\ln\left(1+\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}.\tag{8}$$

Разлагая первый интеграл в степенной ряд, мы видим, что n-й коэффициент содержит интеграл I_n.

Теорема 5. *Если* $0<|t|<1$, *то*

$$\left(1-\frac{1}{\binom{2t}{t}}\right)\frac{1}{t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{I_n}{n!}t^n.\tag{9}$$

Одним из применений этой теоремы является следствие 5.

Теперь свяжем I_{-1} с *константой Эйлера* γ, которая определяется как предел

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\biggl(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\biggr).$$

Если рассматривать γ как "$\zeta(1)$", то формулы

$$I_2 = \frac{9}{2}\zeta(4), \qquad I_1 = 2\zeta(3), \qquad I_0 = \zeta(2)$$

дают основание полагать, что I_{-1} содержит γ. Это предположение также следует из сходства между двойным интегралом (7) для I_{-1} и двойным интегралом для константы Эйлера [8], [9]

$$\gamma = \iint_S \frac{1-X}{(1-XY)(-\ln XY)}\,dX\,dY. \tag{10}$$

Формула (8) приводит к другой формуле, связывающей I_{-1} и γ. Именно, если $t=n$ – положительное целое число, то $\binom{2t}{t}$ – центральный биномиальный коэффициент $\binom{2n}{n}$, фигурирующий в формулах для константы Эйлера

$$\binom{2n}{n}\gamma = A_n - L_n + \iint_S \frac{(X(1-X)Y(1-Y))^n}{(1-XY)(-\ln XY)}\,dX\,dY, \qquad n \geqslant 1,$$

и

$$\gamma = \frac{A_n - L_n}{\binom{2n}{n}} + O\biggl(\frac{1}{2^{6n}\sqrt{n}}\biggr), \qquad n\to\infty,$$

где A_n – некоторое рациональное число и L_n – частная линейная форма в логарифмах [8].

Если произвести в (10) замену переменных $X=x$, $Y=(1-y)/x$, то мы получим интеграл по треугольнику T для константы Эйлера,

$$\gamma = \iint_T \frac{1-x}{xy(-\ln(1-y))}\,dx\,dy, \tag{11}$$

аналогичный интегралу по треугольнику (7) для I_{-1}.

Найдем аналог для γ первого интеграла в формуле (8) для I_{-1}, который содержит обобщенный биномиальный коэффициент $\binom{2t}{t}$. (Существуют классические аналоги для γ второго интеграла, содержащие логарифмы.)

Предложение 2. *Справедлива следующая формула для константы Эйлера*:

$$\gamma = \int_0^\infty \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2\binom{t+k}{k}}\,dt.$$

В качестве примера заметим, что если проинтегрировать почленно и пропотенцировать полученный ряд, то мы получим *бесконечное произведение Сера для* e^γ [10] (заново полученное в [11], [12]):

$$e^\gamma = \prod_{k=2}^\infty \biggl(\prod_{j=1}^k j^{(-1)^j\binom{k-1}{j-1}}\biggr)^{1/k} = \biggl(\frac{2}{1}\biggr)^{1/2}\biggl(\frac{2^2}{1\cdot 3}\biggr)^{1/3}\biggl(\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3}\biggr)^{1/4}\biggl(\frac{2^4\cdot 4^4}{1\cdot 3^6\cdot 5}\biggr)^{1/5}\cdots.$$

Оставшаяся часть статьи строится следующим образом. В пп. 2 и 3 получены соответственно неасимптотические и асимптотические результаты для I_n при $n \geqslant 0$. Примеры применения этих результатов для кратных дзета значений рассматриваются в п. 4, а в п. 5 доказываются формулы для I_{-1} и γ. Заключительный пункт посвящен обобщению I_n на случай интегралов по многомерным аналогам треугольника T; один из которых – повторный интеграл Чена (Дринфилда–Концевича), см. замечание 3. В качестве примера рассматривается соотношение между некоторыми кратными полилогарифмическими значениями и кратными дзета значениями (следствие 7).

2. Интеграл I_n для $n \geqslant 0$. Докажем неасимптотические результаты для $I_0, I_1, I_2, \dots$, сформулированные во введении. Для удобства читателя мы повторяем здесь формулировки доказываемых результатов (лемма 1, теорема 1, следствие 1).

Лемма 1. *Если $k \geqslant 0$ и $l \geqslant 0$ – целые, то*

$$I_{k,l} := \iint_T \frac{(-\ln x)^k(-\ln y)^l}{xy}\,dx\,dy = k!\,l!\,\zeta(l+2,\{1\}_k).$$

Кроме того, если $l \geqslant 1$, то

$$J_{k,l} := \int_0^1 \frac{(-\ln(1-x))^k}{1-x}(-\ln x)^l\,dx = k!\,l!\,\zeta(l+1,\{1\}_k).$$

Доказательство. Имеем

$$I_{k,l} = \int_0^1 \frac{(-\ln x)^k}{x}\int_{1-x}^1 \frac{(-\ln y)^l}{y}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(-\ln x)^k}{x}\cdot\frac{(-\ln(1-x))^{l+1}}{l+1}\,dx.$$

Заменяя x на $1-x$, получим

$$I_{k,l} = \frac{J_{k,l+1}}{l+1}.$$

Таким образом, (4) следует из (5). Чтобы доказать (5), умножим формулу [7; раздел 1]

$$(-\ln(1-x))^k = k!\sum_{n_1>n_2>\dots>n_k>0}\frac{x^{n_1}}{n_1\cdots n_k}$$

на $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots$ и подставим полученный ряд

$$\frac{(-\ln(1-x))^k}{1-x} = k!\sum_{m\geqslant n_1>n_2>\dots>n_k>0}\frac{x^m}{n_1\cdots n_k}$$

в интеграл (5) для $J_{k,l}$. Затем, интегрируя почленно и учитывая, что

$$\int_0^1 x^m(-\ln x)^l\,dx = \frac{l!}{(m+1)^{l+1}},$$

получим

$$J_{k,l} = k!\,l!\sum_{m>n_1>n_2>\dots>n_k>0}\frac{1}{m^{l+1}n_1\cdots n_k} = k!\,l!\,\zeta(l+1,\{1\}_k),$$

что доказывает утверждение леммы.

Докажем теорему 1 в следующей формулировке.

Теорема 1. *Если* $n \geqslant 0$, *то* I_n *можно представить следующими способами*:
(i) *через кратные дзета значения в виде*

$$I_n = n! \sum_{k=0}^{n} \zeta(n-k+2, \{1\}_k); \tag{12}$$

(ii) *через обычные дзета значения в виде*

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{J_{k,n-k+1}}{n-k+1}, \tag{13}$$

где интеграл $J_{k,n-k+1}$, *определенный в* (5), *задается формулой* [5]

$$J_{k,l} = k!\, l! \sum_{p=1}^{l} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \sum_{t_i} \frac{\zeta(t_1)\cdots\zeta(t_p)}{t_1\cdots t_p} \sum_{l_i} \binom{t_1}{l_1} \cdots \binom{t_p}{l_p}, \tag{14}$$

сумма по t_i *берется по всем множествам целых чисел* $\{t_1,\dots,t_p\}$ *таких, что*

$$t_i > 1, \qquad \sum_{i=1}^{p} t_i = k+l+1,$$

и сумма по l_i *берется по всем множествам целых чисел* $\{l_1,\dots,l_p\}$ *таких, что*

$$0 < l_i < t_i, \qquad \sum_{i=1}^{p} l_i = l.$$

Доказательство. Разлагая $(-\ln xy)^n = (-\ln x - \ln y)^n$ в определении (1) интеграла I_n и применяя (4), получим (12). Следовательно, применяя (5), получим формулу (13). Наконец, заметим, что оценка (14) интеграла (5) для $J_{k,l}$ доказана в [5].

Следствие 1. *Для* $n = 0, 1, 2$ *интеграл* I_n *является рациональным кратным числа* $\zeta(n+2)$.

Мы приведем два доказательства этого утверждения. Первое доказательство короткое, но оно использует теорему 1, (ii), доказательство которой дано в [5]. Второе доказательство длиннее, но оно самодостаточное (за исключением доказательства формулы Эйлера): оно использует теорему 1, (i) и следствие 3, доказательства которых не зависят от результатов, полученных в других статьях.

Доказательство 1. При $n = 0, 1, 2$ из формул (13) и (14) следует, что

$$I_0 = J_{0,1} = \zeta(2), \qquad I_1 = \frac{1}{2} J_{0,2} + J_{1,1} = 2\zeta(3), \qquad I_2 = \frac{1}{3} J_{0,3} + \frac{1}{2} J_{1,2} + J_{2,1} = \frac{9}{4}\zeta(4).$$

Доказательство 2. Во введении было показано, что $I_0 = \zeta(2)$. Применяя тот же метод и формулу $\int_0^1 x^{k-1}(-\ln x)\,dx = k^{-2}$, получим

$$I_1 = 2 \iint_T \frac{-\ln x}{xy}\,dx\,dy = 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \ln x\,dx = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^{k-1}(-\ln x)\,dx = 2\zeta(3).$$

С другой стороны, $I_0 = \zeta(2)$ и $I_1 = \zeta(3) + \zeta(2,1)$ в силу теоремы 1, (i) и $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ в силу следствия 3.

Чтобы доказать, что $I_2 = (9/2)\zeta(4)$, достаточно в силу теоремы 1, (i) и следствия 3 применить формулу Эйлера $\zeta(3,1) = \zeta(4)/4$. (Для доказательства последней положим $n = 3$ в его уравнении (9.5) в [13; с. 252].)

Теорема 2. *Если числа* π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\dots$ *алгебраически независимы над полем рациональных чисел, то* I_n *не является рациональным кратным числа* $\zeta(n+2)$ *при* $n > 2$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $n = 3m - 2$ при $m > 1$. Интеграл I_n равен линейной комбинации (13) интегралов $J_{k,l}$ с положительными коэффициентами. Каждый $J_{k,l}$ равен полиному (14) от многих переменных относительно обычных дзета значений. Теперь в (14) моном $\zeta(3)^m$ появляется только при $p = m$, и тогда его коэффициент не равен нулю и имеет знак $(-1)^{m+1}$. Следовательно, в выражении для I_n коэффициент $\zeta(3)^m$ не равен нулю. Отсюда следует, что по условию I_n не может быть рациональным кратным числа $\zeta(n+2) = \zeta(3m)$.

Случаи $n = 3m + 3$ и $n = 3m + 5$ при $m > 0$ аналогичны: рассматриваются соответственно мономы $\zeta(3)^m\zeta(5)$ и $\zeta(3)^m\zeta(7)$. Оставшиеся случаи $n = 3$ и $n = 5$ доказываются прямыми вычислениями. Таким образом, теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 5. Для удобства читателя напомним ее формулировку.

Теорема 5. *Если* $0 < |t| < 1$, *то*

$$\frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{I_n}{n!} t^n. \tag{15}$$

Доказательство. Производящая функция

$$\sum_{k,l\geqslant 0} x^{k+1}y^{l+1}\zeta(l+2,\{1\}_k) = 1 - \frac{\Gamma(1-x)\Gamma(1-y)}{\Gamma(1-x-y)} \tag{16}$$

(ср. с (19)) выводится в [6]. Если $x = y = -t$, то ряд сходится при $|t| < 1$. Полагая $k + l = n$, получим

$$t^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \sum_{k=0}^{n}\zeta(n-k+2,\{1\}_k) = 1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}}\,.$$

Применяя (2), завершаем доказательство теоремы.

3. Асимптотическое разложение интеграла I_n. Применяя теорему 5 и следующую лемму, оценим интеграл I_n при больших n.

Лемма 2. *Предположим, что функция* $f(z)$ *мероморфна в комплексной плоскости и имеет только простые полюса* $z_1, z_2, \dots$ *с вычетами* $r_1, r_2, \dots$ *соответственно. Если* $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots$, *то коэффициенты ряда Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

имеют асимптотическое разложение

$$a_n \approx -\frac{r_1}{z_1^{n+1}} - \frac{r_2}{z_2^{n+1}} - \cdots, \qquad n \to \infty.$$

Замечание 1. Напомним [14; раздел 1.5], что из последней формулы следует, что, при любом фиксированном положительном целом числе k

$$a_n = -\frac{r_1}{z_1^{n+1}} - \cdots - \frac{r_k}{z_k^{n+1}} + O\biggl(\frac{r_{k+1}}{z_{k+1}^{n+1}}\biggr), \qquad n \to \infty. \tag{17}$$

Доказательство леммы 2. Мероморфная функция имеет только конечное число полюсов в любой ограниченной области, таким образом, для любого $k \geqslant 1$ существует $l > k$ такой, что $|z_l| < |z_{l+1}|$. Заметим, что единственными особенностями функции

$$f(z) - \sum_{j=1}^{l} \frac{r_j}{z - z_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \biggl(a_n + \frac{r_1}{z_1^{n+1}} + \cdots + \frac{r_l}{z_l^{n+1}}\biggr) z^n \tag{18}$$

являются $z_{l+1}, z_{l+2}, \dots$. Отсюда и из неравенств $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots$ следует, что радиус сходимости ряда (18) равен $|z_{l+1}|$. Так как $|z_l| < |z_{l+1}|$, можно подставить $z = z_l$ в эти ряды. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \biggl(a_n + \frac{r_1}{z_1^{n+1}} + \cdots + \frac{r_k}{z_k^{n+1}} + \frac{r_{k+1}}{z_{k+1}^{n+1}} + \cdots + \frac{r_l}{z_l^{n+1}}\biggr) z_l^n = 0.$$

Так как $|z_{k+1}| \leqslant |z_{k+2}| \leqslant \cdots \leqslant |z_l|$, в пределе получаем асимптотическую формулу (17). Лемма доказана.

Теорема 3. *Соотношение $I_n \sim 2n!$ выполняется при n, стремящемся к бесконечности. Более точно, имеет место следующее асимптотическое разложение*:

$$\frac{I_n}{n!} \approx 2 + \frac{6}{2^{n+2}} + \frac{20}{3^{n+2}} + \frac{70}{4^{n+2}} + \cdots, \qquad n \to \infty,$$

где числитель в k-м члене равен $\binom{2k}{k}$ при $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Обозначим функцию в левой части (9) через $f(t)$. Кроме устранимой особенности в точке $t = 0$, все особенности функции $f(t)$ являются простыми полюсами в точках $t = -1, -2, \dots$. Вычисления показывают, что вычет в точке $t = -k$ равен

$$\operatorname{Res}(f; -k) = \operatorname{Res}\biggl(\frac{1}{t^2}\biggl(1 - \frac{\Gamma(t+1)^2}{\Gamma(2t+1)}\biggr); -k\biggr) = -\frac{1}{k^2} \lim_{t\to -k} (t+k) \frac{\Gamma(t+1)^2}{\Gamma(2t+1)} = \frac{1}{k}\binom{2k}{k}$$

при $k = 1, 2, \dots$. Применяя теорему 5 и лемму 2, получим второе утверждение теоремы (из которого следует первое утверждение).

Следствие 5. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{n!}$$

расходится, но является суммируемым по Абелю, и его сумма равна $1/2$.

Доказательство. Расходимость следует из (6). Полагая, что $t \to 1^-$ в (15), получаем требуемое суммирование по Абелю.

4. Примеры в случае кратных дзета значений. Применяя результаты, полученные для I_n, рассмотрим кратные дзета значения вида $\zeta(m,\{1\}_k)$.

Следствие 2. *Если $m \geqslant 2$ и $k \geqslant 0$, то кратное дзета значение $\zeta(m,\{1\}_k)$ можно представить в явном виде как полином от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно обычных дзета значений $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, …, $\zeta(m+k)$.*

Доказательство. Положим $l = m-1$ в (5) и (14).

Замечание 2. Этот результат, включая полиномиальную формулу (по крайней мере, неявную), был впервые получен в [6] с помощью производящей функции (см. [6] касательно равносильности с (16))

$$\sum_{k,l\geqslant 0} x^{k+1}y^{l+1}\zeta(l+2,\{1\}_k) = 1 - \exp\biggl(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n+y^n-(x+y)^n}{n}\zeta(n)\biggr). \tag{19}$$

Следствие 3. *Если $k \geqslant 0$ и $l \geqslant 0$, то*

$$\zeta(k+2,\{1\}_l) = \zeta(l+2,\{1\}_k).$$

Доказательство. После замены переменных $x,y \to y,x$ в интеграле (4) из симметрии треугольника T следует, что $I_{k,l} = I_{l,k}$. Применяя лемму 1, получаем искомый результат.

Следствие 4. *Среднее кратных дзета значений $\zeta(m), \zeta(m-1,1), \dots, \zeta(2,\{1\}_{m-2})$ асимптотически стремится к $2/m$ при m, стремящемся к бесконечности. Действительно, имеет место следующее асимптотическое разложение:*

$$\sum_{k=0}^{m-2} \zeta(m-k,\{1\}_k) \approx 2 + \frac{6}{2^m} + \frac{20}{3^m} + \frac{70}{4^m} + \cdots, \qquad m \to \infty.$$

Доказательство. Полагая $m = n+2$ в теоремах 1 и 3, получаем искомое разложение. Отсюда, искомое среднее асимптотически стремится к $2/(m-1) \sim 2/m$ при m, стремящемся к бесконечности.

5. Интеграл I_{-1} и константа Эйлера. Докажем утверждения, сформулированные для I_{-1} и γ во введении. Как обычно, для удобства читателя повторим здесь их формулировки.

Предложение 1. *Имеют место следующие формулы, выражающие двойной интеграл I_{-1} через простые интегралы:*

$$I_{-1} = \int_0^{\infty} \biggl(1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}}\biggr)\frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \ln\biggl(1 + \frac{\ln(1-x)}{\ln x}\biggr)\frac{dx}{x}.$$

Доказательство. В (7), делая замену

$$-\frac{1}{\ln xy} = \int_0^{\infty} (xy)^t\,dt, \tag{20}$$

и меняя порядок интегрирования, получим

$$I_{-1} = \int_0^\infty \int_0^1 \int_{1-x}^1 (xy)^{t-1}\,dy\,dx\,dt = \int_0^\infty \int_0^1 (x^{t-1} - x^{t-1}(1-x)^t)\,dx\,\frac{dt}{t}$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{\Gamma(t)\Gamma(t+1)}{\Gamma(2t+1)}\right)\frac{dt}{t},$$

применяя интеграл Эйлера для бета функции. После замены $\Gamma(t)$ на $t^{-1}\Gamma(t+1)$, получим первое равенство. Интегрируя по y в (7), видим, что второй интеграл также равен I_{-1}.

Теорема 4. *Если* li *– логарифмический интеграл, то*

$$I_{-1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{I_n}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{\mathrm{li}(x-x^2)}{x}\,dx + 1.$$

Доказательство. Подставим

$$-\frac{1}{\ln xy} = \int_0^1 (xy)^t\,dt - \frac{xy}{\ln xy}$$

в (7). Следуя доказательству предложения 1, получим

$$I_{-1} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\binom{2t}{t}}\right)\frac{dt}{t^2} - \iint_T \frac{dx\,dy}{\ln xy}.$$

Подставляя ряд (15) в первый интеграл и интегрируя почленно, получим ряд в искомой формуле. Полагая $y = u/x$ во втором интеграле, получим

$$\iint_T \frac{dx\,dy}{\ln xy} = \int_0^1 \frac{1}{x}\int_{x-x^2}^x \frac{du}{\ln u}\,dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(x-x^2)}{x}\,dx,$$

и, проводя следующие вычисления (см. [15; раздел 6.212]), завершим доказательство:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{li}(x)}{x}\,dx = \lim_{q\to 0}\int_0^1 \frac{\mathrm{li}(x)}{x^{q+1}}\,dx = \lim_{q\to 0}\frac{\ln(1-q)}{q} = -1.$$

Предложение 2. *Имеет место следующая формула для константы Эйлера*:

$$\gamma = \int_0^\infty \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2\binom{t+k}{k}}\,dt.$$

Доказательство. В (20) заменим xy на $1-y$. Подставляя результат в (11) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\gamma = \int_0^\infty \int_0^1 \int_{1-y}^1 \frac{1-x}{xy}(1-y)^t\,dx\,dy\,dt = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{-\ln(1-y)-y}{y}(1-y)^t\,dy\,dt$$
$$= \int_0^\infty \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k}\int_0^1 y^{k-1}(1-y)^t\,dy\,dt.$$

Следуя доказательству предложения 1, приходим к искомой формуле.

6. Интегралы по многомерным аналогам треугольника T. Существует несколько путей обобщения треугольника T и интеграла I_n. Простейшим обобщением T является многогранник

$$V_m := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in [0,1]^m \mid x_1 + x_j \geqslant 1,\ j = 2, \dots, m\}.$$

Теорема 6. *При $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 0$ интеграл*

$$K_{m,n} := \int \cdots \int_{V_m} \frac{(-\ln(x_1 x_2 \cdots x_m))^n}{x_1 x_2 \cdots x_m}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m$$

равен целой линейной комбинации кратных дзета значений с весом $m+n$, а именно,

$$K_{m,n} = n! \sum_{\substack{k_1 \geqslant 0,\, \dots,\, k_m \geqslant 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{(k_2 + \dots + k_m + m - 1)!}{(k_2+1)! \cdots (k_m+1)!} \zeta(k_2 + \dots + k_m + m, \{1\}_{k_1}). \tag{21}$$

Он также равен полиному от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно значений дзета функции Римана в целых точках.

Доказательство. Разлагая $(-\ln(x_1 x_2 \cdots x_m))^n = (-\ln x_1 - \ln x_2 - \dots - \ln x_m)^n$, получим

$$K_{m,n} = \sum_{\substack{k_1 \geqslant 0,\, \dots,\, k_m \geqslant 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \, k_2! \cdots k_m!} \times \int_0^1 \frac{(-\ln x_1)^{k_1}}{x_1} \left(\int_{1-x_1}^1 \frac{(-\ln x_2)^{k_2}}{x_2}\, dx_2 \cdots \int_{1-x_1}^1 \frac{(-\ln x_m)^{k_m}}{x_m}\, dx_m \right) dx_1.$$

Так как

$$\int_{1-x_1}^1 \frac{(-\ln x)^k}{x}\, dx = \frac{(-\ln(1-x_1))^{k+1}}{k+1},$$

мы имеем

$$K_{m,n} = \sum_{\substack{k_1 \geqslant 0,\, \dots,\, k_m \geqslant 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \, (k_2+1)! \cdots (k_m+1)!} \int_0^1 \frac{(-\ln x_1)^{k_1}}{x_1} (-\ln(1-x_1))^{k_2 + \dots + k_m + m - 1}\, dx_1.$$

Вычисляя последний интеграл с помощью формул (5) и (14), приходим к утверждению теоремы.

В случае $m = 2$ многогранник V_2 является треугольником T, интеграл $K_{2,n}$ является треугольным интегралом I_n и теорема 6 сводится к теореме 1. В частности, формула (21) для $K_{m,n}$ является весовой версией формулы (2) для I_n.

Следствие 6. *Если $m \geqslant 2$, то*

$$K_{m,0} = (m-1)!\,\zeta(m).$$

Доказательство. Полагая $n = 0$ в теореме 6, получим $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ в (21).

Существует другое, более естественное доказательство следствия 6, которое не использует теорему 6.

Второе доказательство следствия 6. Воспользуемся представлением

$$\zeta(m)=K'_m:=\int\cdots\int_{[0,1]^m}\frac{dx_1\cdots dx_m}{1-x_1\cdots x_m}\,.$$

(Чтобы доказать эту формулу, разложим подынтегральное выражение в геометрический ряд и проинтегрируем почленно.) Проведем замену переменных

$$x_1=y_m,\quad x_2=\frac{y_{m-1}}{y_m},\quad x_3=\frac{y_{m-2}}{y_{m-1}},\quad \dots,\quad x_{m-1}=\frac{y_2}{y_3},\quad x_m=\frac{1-y_1}{y_2}\,.$$

(При $m=2$ сравним это выражение с преобразованием интеграла I_0 в интеграл Бейкерса для $\zeta(2)$ во введении.) Получим

$$\zeta(m)=\int\cdots\int\frac{dy_1\cdots dy_m}{y_1\cdots y_m}\,,$$

где интеграл берется по многограннику, определенному как $1\geqslant y_m\geqslant y_{m-1}\geqslant\cdots\geqslant y_2\geqslant 0$, $y_2+y_1\geqslant 1$, $y_1\leqslant 1$. В силу симметрии можно поменять между собой переменные y_i и y_j при $i>j>1$. Применяя все перестановки переменных $y_2,\dots,y_m$, получим

$$(m-1)!\,\zeta(m)=\int\cdots\int_{V'_m}\frac{dy_1\cdots dy_m}{y_1\cdots y_m},$$

где интеграл берется по

$$V'_m:=\{(y_1,y_2,\dots,y_m)\in[0,1]^m\mid y_1+y_j\geqslant 1,\ j=2,\dots,m\}.$$

Это и есть интеграл $K_{m,0}$ и, таким образом, второе доказательство завершено.

Замечание 3. Интеграл K'_m равносилен интегралу Чена (Дринфилда–Концевича) [7; раздел 1]

$$\int\cdots\int\frac{dY_1dY_2\cdots dY_m}{(1-Y_1)Y_2\cdots Y_m}$$

по многограннику $1\geqslant Y_m\geqslant\cdots\geqslant Y_1\geqslant 0$: положим $y_1=1-Y_1$ и $y_j=Y_j$ для $j=2,\dots,m$.

Если переписать (21) в виде

$$K_{m,n}=n!\sum_{p=0}^{n}a_{m,p}\zeta(m+p,\{1\}_{n-p}),$$

где $a_{m,p}$ обозначает сумму коэффициентов полинома

$$a_{m,p}:=\sum_{\substack{k_2\geqslant 0,\,\dots,\,k_m\geqslant 0\\ k_2+\cdots+k_m=p}}\frac{(k_2+\cdots+k_m+m-1)!}{(k_2+1)!\cdots(k_m+1)!}\,,$$

то для любого фиксированного $m\geqslant 2$ можно получить замкнутое выражение для $a_{m,p}$. Например,

$$a_{2,p}=1,\qquad a_{3,p}=4\cdot 2^p-2,\qquad a_{4,p}=27\cdot 3^p-24\cdot 2^p+3.$$

В общем случае имеем следующее утверждение.

Предложение 3. *Выберем $m \geqslant 2$ и $p \geqslant 0$. Тогда целые числа $a_{m,p}, a_{m-1,p+1}, \dots, a_{2,p+m-2}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\sum_{t=0}^{m-2} \binom{m-1}{t} a_{m-t,p+t} = (m-1)^{m+p-1}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что если ввести обозначение

$$S_{m,p} := \{(k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^{m-1} \mid k_j \geqslant -1,\ j = 2, \dots, m;\ k_2 + \dots + k_m = p\},$$

то

$$\sum_{S_{m,p}} \frac{(k_2 + \dots + k_m + m - 1)!}{(k_2+1)! \cdots (k_m+1)!} = \sum_{\substack{l_2 \geqslant 0,\, \dots,\, l_m \geqslant 0 \\ l_2 + \dots + l_m = p+m-1}} \frac{(l_2 + \dots + l_m)!}{l_2! \cdots l_m!} = (m-1)^{p+m-1}.$$

Теперь заметим, что если $S_{m,p,t}$ – подмножество множества $S_{m,p}$, состоящего из тех $(m-1)$-наборов $(k_2, \dots, k_m)$, в которых в точности t чисел среди k_j равны -1, то

$$\sum_{S_{m,p,t}} \frac{(k_2 + \dots + k_m + m - 1)!}{(k_2+1)! \cdots (k_m+1)!} = \binom{m-1}{t} \sum_{\substack{l_2 \geqslant 0,\, \dots,\, l_m \geqslant 0 \\ l_2 + \dots + l_{m-t} = p+t}} \frac{(l_2 + \dots + l_m + m - 1 - t)!}{(l_2+1)! \cdots (l_m+1)!}$$
$$= \binom{m-1}{t} a_{m-t,p+t}.$$

Наконец, из того, что $S_{m,p}$ – объединение непересекающихся множеств,

$$S_{m,p} = \bigcup_{t=0}^{m-2} S_{m,p,t},$$

следует утверждение предложения.

Другим обобщением треугольника T является многогранник

$$W_m := \{(x_1, \dots, x_m) \in [0,1]^m \mid x_i + x_j \geqslant 1,\ 1 \leqslant i < j \leqslant m\}.$$

Заметим, что он симметричен по всем переменным в отличие от V_m.

Сначала мы обобщим треугольный интеграл I_0 на интеграл по W_m, а затем продолжим обобщение интегралов I_n на W_m для всех $n \geqslant 0$.

Напомним, что для всех комплексных s и всех z таких, что $|z| < 1$, *полилогарифм* $\mathrm{Li}_s(z)$ определяется сходящимся рядом

$$\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r^s}.$$

Теорема 7. *Если $m \geqslant 2$, то интеграл*

$$L_m := \int \cdots \int_{W_m} \frac{dx_1 \cdots dx_m}{x_1 \cdots x_m}$$

равен полиному от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно значений $\ln 2$, $\zeta(m)$ и $\mathrm{Li}_s(1/2)$ при $s = 2, 3, \dots, m$, именно,

$$L_m = m!\,\zeta(m) - (m-1)\ln^m 2 - m! \sum_{p=0}^{m-2} \frac{\ln^p 2}{p!} \mathrm{Li}_{m-p}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Доказательство. Из симметрии W_m следует, что

$$L_m = m! \int \cdots \int_{W'_m} \frac{dx_1 \cdots dx_m}{x_1 \cdots x_m},$$

где W'_m – многогранник, заданный неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_m \leqslant 1$ и $x_1 + x_2 \geqslant 1$. Последовательно интегрируя по $x_m, x_{m-1}, \dots, x_2$ и полагая, что $x = x_1$, $y = x_2$, получим

$$L_m = m(m-1) \iint_H \frac{(-\ln y)^{m-2}}{xy}\, dx\, dy,$$

где H – треугольник, заданный неравенствами $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ и $x + y \geqslant 1$. (Таким образом, H является верхней половиной треугольника T, разделенного пополам линией $y = x$.) Так как H также определяется неравенствами $1/2 \leqslant y \leqslant 1$ и $1 - y \leqslant x \leqslant y$, мы видим, что

$$\begin{aligned} L_m &= m(m-1) \int_{1/2}^{1} \frac{(-\ln y)^{m-2}(\ln y - \ln(1-y))}{y}\, dy \\ &= (m-1)\biggl(-(\ln 2)^m + m \int_{1/2}^{1} \frac{(-\ln y)^{m-2}(-\ln(1-y))}{y}\, dy\biggr). \end{aligned}$$

Разложение в ряд

$$\frac{-\ln(1-y)}{y} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{y^{r-1}}{r}$$

приводит к равенству

$$\int_{1/2}^{1} \frac{(-\ln y)^{m-2}(-\ln(1-y))}{y}\, dy = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \int_{1/2}^{1} y^{r-1}(-\ln y)^{m-2}\, dy.$$

Теперь рассмотрим тождество

$$\int_{1/2}^{1} y^{t+r-1}\, dy = \frac{1}{t+r} - \frac{1}{(t+r)2^{t+r}}.$$

Если его продифференцировать l раз по t и затем положить $t = 0$, то мы получим

$$\int_{1/2}^{1} y^{r-1}(-\ln y)^l\, dy = \frac{l!}{r^{l+1}} - \frac{l!}{2^r} \sum_{p=0}^{l} \frac{\ln^p 2}{r^{l-p+1} p!}.$$

Полагая $l = m - 2$, приходим к утверждению теоремы.

Пример 1. Положим $m = 2$, что дает

$$L_2 = \iint_{W_2} \frac{1}{xy} = 2\zeta(2) - \ln^2 2 - 2\operatorname{Li}_2\biggl(\frac{1}{2}\biggr).$$

С другой стороны, $L_2 = I_0 = \zeta(2)$. Это доказывает формулу Эйлера для дилогарифма в точке 1/2 [1; раздел 1.2], [2; с. 43–45], [16; раздел 1.4]:

$$\operatorname{Li}_2\biggl(\frac{1}{2}\biggr) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2 2^r} = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\ln^2 2}{2}. \qquad (22)$$

Теперь возьмем $m=3$. Применяя формулу Ландена для трилогарифма в точке $1/2$ [16; формула 6.12],

$$\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7\zeta(3)}{8}-\frac{\pi^2\ln 2}{12}+\frac{\ln^3 2}{6}, \tag{23}$$

получим

$$L_3=\iiint_{W_3}\frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{x_1x_2x_3}=6\zeta(3)-2\ln^3 2-6\,\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)-6\ln 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\zeta(3).$$

Таким образом, что удивительно, оба числа L_3 и I_1 являются рациональными кратными числа $\zeta(3)$.

Наконец, полагая $m=4$ и применяя формулы для $\mathrm{Li}_2(1/2)$ и $\mathrm{Li}_3(1/2)$, получим

$$L_4=\frac{4}{15}\pi^4-\ln^4 2+\pi^2\ln^2 2-21\zeta(3)\ln 2-24\,\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right).$$

Теперь обобщим I_n на интеграл по многогранник W_m. Сначала расширим определение полилогарифма $\mathrm{Li}_s(z)$, вводя определение *кратного полилогарифма*

$$\mathrm{Li}_{s_1,\dots,s_l}(z):=\sum_{n_1>n_2>\dots>n_l>0}\frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_l^{s_l}}.$$

Теорема 8. *Если $m\geqslant 2$ и $n\geqslant 0$, то интеграл*

$$M_{m,n}:=\int\cdots\int_{W_m}\frac{(-\ln(x_1\cdots x_m))^n}{x_1\cdots x_m}\,dx_1\cdots dx_m$$

равен полиному от многих переменных с рациональными коэффициентами относительно значений $\ln 2$, $\zeta(a,\{1\}_{m+n-a})$ при $m\leqslant a\leqslant m+n$ и $\mathrm{Li}_{b,\{1\}_c}(1/2)$ при $b+c\leqslant m+n$, $b\geqslant 2$, $0\leqslant c\leqslant n$.

В явном виде, если $A(k_2):=1/k_2!$ и если

$$A(k_2,\dots,k_m):=\frac{1}{k_2!\cdots k_m!}\cdot\frac{1}{(k_m+1)(k_{m-1}+k_m+2)\cdots(k_3+\dots+k_m+m-2)}$$

при $m\geqslant 3$, то

$$\begin{aligned}M_{m,n}=m!\,n!&\sum_{\substack{k_1\geqslant 0,\dots,k_m\geqslant 0\\ k_1+\dots+k_m=n}}A(k_2,\dots,k_m)\\&\times\Biggl[(k_2+\dots+k_m+m-2)!\,\zeta(k_2+\dots+k_m+m,\{1\}_{k_1})\\&\qquad-\frac{\ln^{m+n}2}{(k_1+1)!\,(m+n)}\\&\qquad-(k_2+\dots+k_m+m-2)!\sum_{p=0}^{k_2+\dots+k_m+m-2}\frac{\ln^p 2}{p!}\,\mathrm{Li}_{k_2+\dots+k_m+m-p,\{1\}_{k_1}}\left(\frac{1}{2}\right)\Biggr].\end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7 (случай $n=0$).

Отметим, что имеет место равенство интегралов $M_{2,n}=I_n$.

В качестве примера применения теоремы 8 получим следующее соотношение между некоторыми кратными значениями полилогарифма и кратными дзета значениями. (Это соотношение также можно вывести из формулы свертки Гёльдера [17; (7.2)].)

Следствие 7. *Если $n \geqslant 0$, то*

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-k}\frac{\ln^p 2}{p!}\operatorname{Li}_{n-k+2-p,\{1\}_k}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-2^{n+1}}{(n+2)!}\ln^{n+2}2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\zeta(n-k+2,\{1\}_k).$$

Доказательство. В теореме 8 возьмем $m=2$ и положим $k_1=k$, так что $k_2=n-k$. Тогда $A(k_2)=1/(n-k)!$ и

$$M_{2,n}=2n!\sum_{k=0}^{n}\biggl[\zeta(n-k+2,\{1\}_k) \\ -\frac{\ln^{n+2}2}{(k+1)!\,(n-k)!\,(n+2)}-\sum_{p=0}^{n-k}\frac{\ln^p 2}{p!}\operatorname{Li}_{n-k+2-p,\{1\}_k}\left(\frac{1}{2}\right)\biggr].$$

Теперь подставим $M_{2,n}=I_n$, и применим теорему 1, (i) и тождество

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!\,(n-k)!}=\frac{2^{n+1}-1}{(n+1)!}\,.$$

Пример 2. Случай $n=0$ – это формула Эйлера (22) при $\operatorname{Li}_2(1/2)$. Полагая $n=1$ и подставляя $\zeta(2,1)=\zeta(3)$, получим соотношение

$$\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\ln 2+\operatorname{Li}_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\ln^3 2}{2}+\zeta(3),$$

которое является частным случаем уравнения (7.3) в [17]. Подставляя значения $\operatorname{Li}_2(1/2)$ и $\operatorname{Li}_3(1/2)$ в (22) и (23), получим формулу

$$\operatorname{Li}_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r^2 2^r}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r-1}\right)=\frac{\zeta(3)}{8}-\frac{\ln^3 2}{6}\,.$$

Наконец, добавляя $\operatorname{Li}_3(1/2)$, получим суммирование Рамануджана [13; с. 258]

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2 2^r}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r}\right)=\zeta(3)-\frac{\pi^2\ln 2}{12}\,.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] P. Cartier, “Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents”, *Astérisque*, **282**, Exp. № 885 (2002), 137–173.

[2] W. Dunham, *Euler*: *The Master of Us All*, Dolciani Math. Exp., **22**, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

[3] S. Zlobin, *On a certain integral over a triangle*, `arXiv: math.NT/0511239`.

[4] F. Beukers, "A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$", *Bull. London Math. Soc.*, **11**:3 (1979), 268–272.

[5] K. S. Kölbig, J. A. Mignaco, E. Remiddi, "On Nielsen's generalized polylogarithms and their numerical calculation", *Nordisk Tidskr. Informationsbehandling* (*BIT*), **10**:1 (1970), 38–73.

[6] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, "Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k", Research paper R5, *Electron. J. Combin.*, **4**:2 (1997).

[7] M. Waldschmidt, "Multiple polylogarithms: an introduction", *Number Theory and Discrete Mathematics*, Proc. Int. Conf. held at Panjab University (Panjab University, Chandigarh, October 2–6, 2000), Trends Math., eds. A. K. Agarwal et al., Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, 1–12.

[8] J. Sondow, "Criteria for irrationality of Euler's constant", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**:11 (2003), 3335–3344.

[9] J. Sondow, "Double integrals for Euler's constant and $\ln 4/\pi$ and an analog of Hadjicostas's formula", *Amer. Math. Monthly*, **112**:1 (2005), 61–65.

[10] J. Ser, "Sur une expression de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, **182** (1926), 1075–1077.

[11] J. Sondow, *An infinite product for e^γ via hypergeometric formulas for Euler's constant*, γ, `arXiv: math.CA/0306008`, 2003.

[12] J. Sondow, "A faster product for π and a new integral for $\ln \pi/2$", *Amer. Math. Monthly*, **112**:8 (2005), 729–734.

[13] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, part I, Springer-Verlag, New York, 1985.

[14] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, Dover Publ., New York, 1981.

[15] S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego, 2000.

[16] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North-Holland Publ., New York, 1981.

[17] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, P. Lisonek, "Special values of multiple polylogarithms", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353**:3 (2001), 907–941.

Дж. Сондоу
E-mail: `jsondow@alumni.princeton.edu`

Поступило
09.02.2007

С. А. Злобин
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `sirg_zlobin@mail.ru`